МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Хіміко-технологічний факультет

Кафедра кібернетики хіміко-технологічних процесів

ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

Оптимізація в умовах визначеності та невизначеності

Методичні вказівки до практичних робіт
для студентів спеціальності
151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології»

Рекомендовано вченою радою хіміко-технологічного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2017

Оптимізація складних технологічних систем. Оптимізація в умовах визначеності та невизначеності: Методичні вказівки до практичних робіт для студентів спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Уклад.: Складанний Д.М. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 63 с.

Гриф надано вченою радою
хіміко-технологічного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №6 від 07.06.2017 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

Оптимізація в умовах визначеності та невизначеності

Методичні вказівки до практичних робіт для студентів спеціальності
151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Укладач Складанний Денис Миколайович, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор Шахновський А. М., доц. каф. КХТП, канд. техн. наук, доц.

Рецензент Лапінський А.В., ст.викл. каф. ТНР та ЗХТ, канд. техн. наук.

Зміст

Вступ

Кредитний модуль «*Оптимізація в умовах визначеності та невизначеності*» є складовою частиною дисципліни «*Оптимізація складних технологічних систем*» і вивчається студентами другого рівня підготовки спеціальності 151 – Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології на першому (п'ятому) курсі у другому семестрі. У зазначеному модулі заплановане виконання студентами восьми практичних робіт.

Мета і завдання практикуму – закріпити на практиці вміння та досвід, отримані в процесі вивчення кредитного модулю «*Оптимізація в умовах визначеності та невизначеності*». Матеріал практикуму спрямований на одержання практичних вмінь використання методів оптимізації складних технологічних.

Представлений практикум складається з восьми робіт, що охоплюють розділи: багатокритеріальна оптимізація (роботи 1 і 2), прийняття оптимальних рішень за результатами оброблення експертиз (роботи 3 і 4), оптимізація в умовах стохастичної невизначеності (робота 5), в умовах статистичної невизначеності (роботи 6 і 7) та в умовах нечіткої невизначеності (робота 8). Для кожної роботи подано основні теоретичні відомості та розрахункові формули і розглянуто типовий приклад виконання. Для самоперевірки засвоєння матеріалу роботи подано контрольні запитання.

Кожне практичне завдання виконується протягом двох академічних годин. Протягом заняття студент повинен засвоїти тему, мету і завдання практичної роботи, повторити основні теоретичні положення за темою роботи і самостійно виконати розрахунки за своїм варіантом завдання. Роботи виконуються на персональному комп'ютері з використанням програм електронних таблиць або спеціалізованих математичних програмних пакетів. Вибір конкретного типу та версії програмного забезпечення для їх виконання залишається з студентом.

За результатами практичного заняття студент має оформити звіт. Звіт оформлюється на аркушах формату А4 і має включати номер практичної роботи, її тему, номер групи і прізвища студента, який виконав роботу, прізвища викладача, який її прийняв. У звіті мають бути зазначені мета та завдання практичної роботи, варіант індивідуального завдання, він повинен містити порядок виконання розрахунків, із зазначенням розрахункових формул та виконуваних дій, та їх результати. До кожного результату розрахунку повинен бути наведений короткий критичний аналіз. Допускається як надрукований, так і рукописний варіант оформлення звіту.

Варіанти завдань до практичних робіт, окрім роботи 7, подано у додатках. Початкові дані у додатку В застосовуються як для роботи 3, так і 4.

Початковими даними до робота 7 є інтервальна модель, яка побудована студентами за результатами виконання лабораторної роботи на тему «Визначення оптимального режиму роботи парогенератора за інтервальними моделями», цього ж кредитного модуля.

Укладач цих методичних вказівок висловлює подяку співробітникам кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів за всебічну допомогу в їх підготовці. Дякую відповідальному редактору та рецензентам за виявлені помилки і критичні зауваження, які дозволили поліпшите це видання, а також студентам кафедри минулих років за допомого в апробації цих практичних робіт і підготовці рукопису.

Практична робота 1

Одержання Паретто-оптимального рішення згорткою критеріїв оптимальності

Мета роботи – виробити уміння і досвід визначення режим проведення процесу, оптимальний за згорткою критеріїв.

Завдання

За результатами розрахунку коефіцієнтів експериментально-статистичних моделей трьох критеріїв:

1. Визначити оптимуми часткових критеріїв оптимальності $y_j^{(опт)}$ шляхом їх однокритеріальної оптимізації.
2. Визначити антиоптимуми часткових критеріїв оптимальності $y_j^{(антиопт)}$ шляхом їх однокритеріальної оптимізації.
3. Використовуючи формулу (1.3) нормалізувати критерії оптимальності процесу.
4. Прийняти ваги показників якості в інтервалі (0 ÷ 1) з кроком 0,1.
5. Провести багатокритеріальну оптимізацію за трьома показниками якості з використанням згортки критеріїв. Для парних варіантів використати адитивну, а для непарних варіантів – мультиплікативну згортку критеріїв.

   Початкові дані для розрахунків подано у додатку А за варіантами.

Основні теоретичні положення

При виборі раціональних варіантів складних систем більшість задач оптимізації, що виникають, є багатокритеріальними, тому що функціонування складної системи має задовольняти багатьом критеріям ефективності одночасно. Основою концепцією, що використовується при багатокритеріальній оптимізації, є концепція не домінуючих точок в просторі розв'язків і в критеріальному просторі (множині Парето).

В загальному випадку задачу багатокритеріальної оптимізації по p критеріях якості f_1, f_2, …, f_p набуває вигляду:

$$S(X) = \{f_1(X); f_2(X);...; f_p(X)\} \to \min_{X \in G}$$

де X – вектор змінних; $f_i(X),\ i = \overline{1...p}$ – окремий критерій оптимальності; G – область припустимих значень розв'язків.

Розв'язок $X^0 \in D$ називається ефективним, якщо в множині допустимих альтернатив D не існує розв'язку, яке за всіма цільовими функціями було б не гірше за X^0, а принаймні за однією цільовою функцією було б краще за X^0. Тобто, для будь-якої допустимої точки за межами множини Парето, знайдеться точка множини Парето, що дає за всіма цільовими функціями значення не гірше, а принаймні за однією цільовою функцією було б краще. З вказаних визначень слідує, що розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації доцільно шукати в множині Парето, тому що будь-який інший розв'язок буде заздалегідь гіршим. З точки зору математики розв’язки з множини Парето не можна розділити на більш та менш прийнятні, тому після формування множини Парето задача вважається математично розв'язаною.

Одним з підходів до вирішення задач багатокритеріальної оптимізації з одержанням Паретто-оптимального розв'язку може бути перетворення її на задачу однокритеріальної оптимізації шляхом згортки окремих критеріїв оптимальності. Розрізняють два способи такої згортки:

Адитивний. При цьому узагальнений критерій оптимальності розраховують за формулою:

$$S(X) = w_1 \cdot f_1(X) + w_2 \cdot f_2(X) + ... + w_p \cdot f_p(X) \qquad (1.1)$$

Мультиплікативний. При цьому критерій оптимальності розраховують за формулою:

$$S(X) = f_1(X)^{w_1} \times f_2(X)^{w_2} \times ... \times f_p(X)^{w_p} \qquad (1.2)$$

де w_i – вагові коефіцієнти: $\sum_{i=1}^{p} w_i = 1; w_i > 0,\ i = \overline{1...p}$.

В результаті розв’язку оптимізаційної задачі за згорткою критеріїв одержують Парето-оптимальну точку. Якщо окремі показники якості описуються опуклими функціями до для знаходження такої точки відомі необхідні і достатні умови.

Метод згортки критеріїв використовується досить часто перш за все через простоту та зрозумілість використання. Проте він має ряд важко переборних недоліків:

– не завжди втрата якості за одним критерієм компенсується приростом якості за іншими. Оптимальний за згорткою розв'язок може характеризуватися низькою якістю деяких окремих критеріїв і таким чином бути неприйнятним;

– не завжди можна встановити вагові коефіцієнті критеріїв. Частіше відома лише порівняльна важливість критеріїв, а інколи всяка інформація про важливість відсутня;
– величина цільової функції отриманої згорткою частіше за все не має ніякого фізичного змісту;
– багаторазове використання алгоритму по згортці може давати декілька точок множини Парето, або навіть одну, навіть у випадку коли в дійсності таких точок більше.

Враховуючи те, що критерії оптимізації y_1, y_2 та y_3 мають різні розмірності і фізичний зміст, об'єднувати їх напряму недоцільно. Тому, в якості часткових критеріїв оптимальності процесу доцільно використати:

$$f_j(X) = \frac{y_j - y_j^{(опт)}}{y_j^{(антиопт)} - y_j^{(опт)}}, \tag{1.3}$$

де $y_j^{(опт)}$ – значення вихідної змінної яке знайдене за результатами однокритеріальної оптимізації без врахування інших вихідних змінних, $y_j^{(антиопт)}$ –.значення протилежного екстремуму Такий критерій доцільно мінімізувати.

Приклад виконання роботи

У якості прикладу розглянемо процес одержання целюлози. Вихідні змінні, що визначають якість одержуваної целюлози, обрано: вихід целюлози, % (y_1), вміст α-целюлози, % (y_2) та середній ступінь полімеризації (y_3) целюлози. Очевидно, що для всіх вказаних вихідних змінних найкращим буде максимальне значення. Фактори процесу зведемо у таблицю 1.1.

Таблиця 1.1 – Рівні і інтервали варіювання факторів

Фактори	*Визначення*	*Середній рівень*	*Інтервал варіювання*
x_1	Тривалість варіння, год	3,0	0,5
x_2	Температура варіння, °С	170	10

За результатами проведення експерименту та обробки його результатів побудовано експериментально-статистичні моделі процесу у вигляди поліномів другого ступеня:

$$\begin{aligned} y_1 &= 55{,}7 - 0{,}94x_1 + 1{,}23x_2 - 0{,}02x_1x_2 - 0{,}29x_1^2 - 2{,}25x_2^2; \\ y_2 &= 92{,}3 - 0{,}86x_1 - 3{,}29x_2 - 0{,}92x_1x_2 + 0{,}21x_1^2 - 1{,}76x_2^2; \\ y_3 &= 720{,}8 - 47{,}8x_1 - 76{,}7x_2 + 17{,}3x_1x_2 - 16{,}7x_1^2 - 22{,}4x_2^2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для масштабування значень вихідних змінних за формулою (1.3), визначимо оптимальне (максимальне) і антиоптимальне (мінімальне) в області варіювання факторів значення кожного з показників якості. Оскільки показники якості описуються поліноміальними залежностями, така задача не являє труднощів. Результати заведемо у таблицю 1.2

Таблиця 1.2 – Оптимальні та антиоптимальні значення показників якості. Учбовий приклад

	y_1	y_2	y_3
Максимум	56,57	94,13	823,5
Мінімум	52,9	85,71	574,5

Таким чином, згідно формули (1.3), масштабовані значення показників якості набувають вигляду:

$$f_1\left(\overrightarrow{X}\right)=\frac{y_1-52{,}9}{3{,}67};\;\; f_2\left(\overrightarrow{X}\right)=\frac{y_2-85{,}71}{8{,}42};\;\; f_3\left(\overrightarrow{X}\right)=\frac{y_3-574{,}5}{249}.$$

Для побудови функції згортки застосуємо адитивний підхід. Вагові коефіцієнти будемо обирати з інтервалом 0,1. Очевидно, що оптимальним значенням функції згортки буде мінімум.

Розрахунки проведено за допомогою додатку *Excel* програмного пакету *Microsoft Office*. Використано компонент «Пошук рішення». Результати розрахунку зведемо у таблицю 1.3

Таблиця 1.3 – Результати побудови Парето-оптимальних точок. Учбовий приклад

Ваги			*S(X)*	*Значення показників якості*			*Масштабовані показник якості*			*Фактори*	
w_1	w_2	w_3		y_1	y_2	y_3	f_1	f_2	f_3	x_1	x_2
0,1	0,1	0,8	0,038	53,48	85,71	574,5	0,37827	0,00000	-0,00008	1	1
0,1	0,2	0,7	0,038	53,48	85,71	574,5	0,37827	0,00000	-0,00008	1	1
0,1	0,8	0,1	0,016	53,48	85,71	574,5	0,15804	0,00000	-0,00008	1	1
0,1	0,7	0,2	0,038	53,48	85,71	574,5	0,37827	0,00000	-0,00008	1	1
0,8	0,1	0,1	0,061	51,06	94,13	693,3	-0,10865	1,00000	0,47683	1	-1
0,7	0,2	0,1	0,172	51,06	94,13	693,3	-0,10865	1,00000	0,47683	1	-1

Продовження розрахунків і заповнення таблиці 1.3 залишаємо за читачем. У результаті утворюються точки області Парето. Серед цих точок можна обрати найкращу для вирішення задачі, базуючись на відносній важливості критеріїв

Контрольні запитання

1. Що таке паретівське рішення? Як воно визначається?
2. Що проголошує принцип оптимальності по Парето?
3. Як визначається Паретро-оптимальна область у просторі змінних? У просторі показників якості?
4. Які підходи використовуються для одержання Парето-оптимальних рішень?
5. Які способи згортки критеріїв вам відомі? В чому вони полягають? Які переваги і недоліки вони мають?
6. Які методи ієрархічної оптимізації критеріїв вам відомі? В чому вони полягають? Які переваги і недоліки вони мають?

Практична робота 2

Вибір оптимального рішення в умовах багатокритеріальності

Мета роботи – виробити уміння і досвід визначення варіанту проведення процесу, який забезпечує найкращий за узагальненим показником результат його проведення.

Завдання

За результатами експериментів по визначенню шести показників якості:

1. Визначити коефіцієнти лінеаризації окремих критеріїв оптимальності.
2. Побудувати часткові функції бажаностей на основі окремих критеріїв.
3. Обчислити узагальнену функцію бажаності для кожного з варіантів.
4. Визначити оптимальний варіант проведення процесу.

Початкові дані для розрахунків подано у додатку Б за варіантами.

Основні теоретичні положення

На практиці часто зіштовхуються з необхідністю знайти оптимальне рішення у відповідності не з однією, а з декількома функціями мети. Серед причин, що приводять до багатокритеріальності, варто виділити множинність технологічних, економічних, технічних та інших вимог, що пред'являються до характеристик об'єкту дослідження.

Кожен критерій має свій фізичний зміст і свою розмірність. Щоб об'єднати різні часткові критерії, насамперед, доводиться вводити для кожного з них деяку безрозмірну шкалу. Шкала повинна бути однотипною для всіх поєднуваних критеріїв, що дозволяє їх порівняння. Зручним способом побудови узагальненого критерію є узагальнена функція бажаності Харрінгтона. В основі побудови цієї узагальненої функції полягає ідея перетворення натуральних значень окремих критеріїв у безрозмірну шкалу бажаності або переваги. Її призначення – встановлення відповідності суб'єктивних оцінок ОПР деяким числовим відміткам єдиної шкали бажаності. Ця відповідність наведена в таблиці 2.1.

Значення окремої функції мети, переведене в безрозмірну шкалу бажаності, позначається через d_u (u = 1, 2, …, n) і називається окремою функцією бажаності або просто – окремою бажаністю. Шкала бажаності має інтервал від нуля до одиниці. Значення d_u = 0 відповідає абсолютно неприйнятному рівню даної властивості, а значення d_u = 1 – найкращому значенню властивості. Значення d_u = 0,63 і d_u = 0,37 витікають внаслідок обчислень: $0{,}63 \approx 1 - 1/e$; $0{,}37 \approx 1/e$. Розрахунок окремої функції бажаності виконується по формулі:

$$d_u = \exp[-\exp(-y')] \tag{2.1}$$

де: y' – лінеаризовані значення окремого критерію оптимальності, які обчислюються за формулою: $y' = b_0 + b_1 y$, де y – натуральне значення показника якості, а коефіцієнти b_0 і b_1 знаходять, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} b_0 + y_i^{(1)} b_1 = c_1 \\ b_0 + y_i^{(2)} b_1 = c_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

де $y_i^{(1)}$ і $y_i^{(2)}$ – значення показника якості, що відповідають двом значенням функції бажаності, c_1 і c_2 – константи, які відповідають тим самим значенням.

Таблиця 2.1 – Стандартні оцінки на шкалі бажаності

Бажаність	*Оцінки на шкалі бажаності*
Дуже добре	1,00 – 0,80
Добре	0,80 – 0,63
Задовільно	0,63 – 0,37
Погано	0,37 – 0,20
Дуже погано	0,20 – 0,00

Функція бажаності зручна тим, що має такі властивості як безперервність, монотонність і гладкість. Крім того, ця крива добре відображає той факт, що в областях бажаності близьких до 0 і 1, її чутливість істотно нижче, ніж у середній зоні. Зміною числа інтервалів на кодованій шкалі (осі y') можна регулювати крутизну кривої в середній зоні.

Після того, як обрана шкала бажаності і окремі функції мети перетворені в окремі функції бажаності, можна приступити до основної задачі – побудові узагальненої функції бажаності D. Харрінгтон запропонував для цього наступну формулу:

$$D = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^{n} d_u} \tag{2.3}$$

Узагальнена функція бажаності задається як середнє геометричне часткових бажаностей. Це співвідношення відображає такий важливий факт: якщо хоча б одна окрема бажаність $d_u = 0$, то узагальнена функція теж буде дорівнювати нулю й об'єкт дослідження не може бути визнаний задовільним. З іншої сторони $D = 1$ тоді і тільки тоді, коли всі $d_u = 1$ ($u = 1, 2, \ldots, n$)... При цьому узагальнена функція бажаності дуже чутлива до малих значень часток бажаностей.

Значення шкали бажаності, представлений у табл. 2.1 однаковий, як для окремих бажаностей, так і для узагальненої. У функцію D можуть входити найрізноманітніші окремі критерії оптимальності: технологічні, техніко-економічні, естетичні та ін. Тому можна затверджувати, що узагальнена функція бажаності є кількісним, однозначним, єдиним і універсальним показником якості досліджуваного об'єкта, а це дозволяє використовувати її як критерій оптимізації.

У даній роботі для побудови і розрахунку узагальненої функції бажаності Харрінгтона рекомендується використати програму MS Excel з пакету MS Office.

Приклад виконання роботи

Розглянемо для прикладу процедуру обрання оптимального з чотирьох режимів роботи системи, кожен з яких характеризується трьома показниками якості (таблиця 2.2):

Таблиця 2.2 – Початкові дані учбового прикладу. Частина 1.

Режим	y_1	y_2	y_3
1	162	28	-24
2	280	11	-22
3	221	23	-30
4	339	24	-23

На думку особи, що приймає рушення, пограничним відміткам на шкалі бажаності будуть відповідати наступні значення цих показників (таблиця 2.3):

Таблиця 2.3 – Початкові дані учбового прикладу. Частина 2.

Показник	*Значення на граничних рівнях:*			
	дуже погано – погано	*погано – задовільно*	*задовільно – добре*	*добре – дуже добре*
y_1	95	120	200	300
y_2	40	20	15	10
y_3	–15	–18	–20	–25

Для обрання оптимального варіанту, перш за все проведемо лінеаризацію. Для цього знайдемо константи у рівнянні (2.2). Для прикладу, обираємо значення показника якості, що відповідають двом значенням функції бажаності 0,37 і 0,8, що відповідає пограничним значенням між погано і задовільно і між добре і дуже добре відповідно. Знайдемо константи c_1 і c_2:

$$\begin{matrix} 0{,}37 = \exp(-\exp(-c_1)); \\ 0{,}8 = \exp(-\exp(-c_2)). \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -\ln(-\ln 0{,}37); \\ c_2 = -\ln(-\ln 0{,}8). \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1 \approx 0{,}005764; \\ c_2 \approx 1{,}50. \end{matrix}$$

Таким чином, отримуємо три системи рівнянь виду (2.2):

$$\begin{cases} b_0 + 120b_1 = 0{,}005764; \\ b_0 + 300b_1 = 1{,}5. \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 + 20b_1 = 0{,}005764; \\ b_0 + 10b_1 = 1{,}5. \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 - 18b_1 = 0{,}005764; \\ b_0 - 25b_1 = 1{,}5. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи рівнянь, отримаємо для кожного з показників значення коефіцієнтів. Підставивши їх у формулу $y' = b_0 + b_1 y$, знайдемо лінеаризовані значення самих показників. Зведено ці розрахунки у таблиці 2.4 і 2.5

Таблиця 2.4 – Коефіцієнти лінеаризації

b_0	b_1
-0,990	0,0083
2,99	-0,149
-3,84	-0,2135

Таблиця 2.5 – Лінеаризовані показники

Режим	y_1'	y_2'	y_3'
1	0,3544	-1,1896	1,2865
2	1,3339	1,3505	0,8596
3	0,8442	-0,4425	2,5672
4	1,8237	-0,5919	1,0730

Розрахуємо значення часткових бажаностей за формулою (2.1), та зведемо їх в узагальнену функцію Харрнгтона за формулою (2.3) (таблиця 2.6).

Таблиця 2.6 – Часткові бажаності та узагальнена функція бажаності.

Режим	d_1	d_2	d_3	D
1	0,4958	0,0374	0,7586	0,2414
2	0,7684	0,7717	0,6549	***0,7296***
3	0,6506	0,2109	0,9261	0,5027
4	0,8509	0,1641	0,7104	0,4629

Таким чином, констатуємо, що найкращим є другий режим роботи системи (узагальнена функція бажаності максимальна), і рівень функції бажаності для нього відповідає значенню «добре» за шкалою бажаності

Контрольні запитання

1. Що таке функція бажаності? Для чого вона використовується?
2. Як будується функція бажаності? Поясніть числові значення відміток на шкалі бажаності.

3. Розгляньте та поясніть ситуації використання функції бажаності, зображені на рисунку 4.1.
4. Що таке узагальнена функції бажаності? Яка мета її побудови? Як будується узагальнена функції бажаності?
5. Які властивості має функція бажаності? Узагальнена функції бажаності?
6. Назвіть інші методи, що використовуються з аналогічною метою. В чому їх суть?

Практична робота 3

Вибір оптимального типу іонообмінної смоли за результатами ранжування

Мета роботи – виробити уміння і досвід оброблення результатів опитування колективу експертів для вибору оптимальних варіантів систем.

Завдання

За результатами ранжування п’яти альтернативних варіантів, проведеного чотирма експертами:

1. Виправити результати ранжування у відповідності до правил теорії рангової кореляції.
2. Визначити найкращий, на думку експертів, варіант рішення задачі.
   Початкові дані для розрахунків подано у додатку В, таблиця В.1 та В.2. за варіантами.

Основні теоретичні положення

У задачі, що вирішується у цій лабораторній роботі, проводився вибір типу іонообмінної смоли для очищення від ртуті стічних вод виробництва сірчаної кислоти. Експертам, чотирьом спеціалістам, було доручено оцінити п'ять зразків іонообмінних смол (КУ-2, КУ-2-20, СХ-97, сульфо-вугілля, DCHR-76), кожен з яких характеризується п’ятьма основними властивостями: X_1 – повною обмінною ємністю, X_2 – робочим інтервалом pH, X_3 – робочим інтервалом температур, X_4 – селективністю, X_5 – вартістю.

В якості початкових даних до роботи пропонуються результати ранжування властивостей та результати ранжування сорбентів за цими властивостями

Розглянемо процедуру аналізу результатів експертного дослідження. Приписування ваг для кожного сумарного рангу якісних показників $\sum_{j=1}^{m} X_q^j$ здійснюється за формулою:

$$V_q = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} X_q^j} \Bigg/ \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} X_q^j}, \qquad (3.1)$$

Нормовані ваги показників можна представити у вигляді вектору-рядка:

$$V = \lfloor V_1, V_2, ..., V_q, ..., V_k \rfloor$$

При цьому повинна виконуватися умова $\sum_{q=1}^{k} V_q = 1$. Отриманий вектор-рядок рангів показників буде однією зі складових вирішуючого правила.

На другому етапі перевіримо узгодженість думок експертів. Знаючи середнє, можна записати суму квадратів відхилень

$$S_d^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} X_{q_j}^{i} - a \right)^2 , \tag{3.2}$$

і проаналізувати її. Очевидно, що при повній неузгодженості думок експертів суми рангів у рядках будуть максимально близькими до величини *a* при непарному *m* чи рівні їй при парному *m*, тобто в цьому випадку $S_d^2 \to min$. При повній узгодженості думок фахівців, коли оцінки всіх експертів цілком збігаються, $S_d^2 \to \max$. Нескладними перетвореннями можна отримати максимально можливе значення S_d^2, тобто значення, яке відповідає повній погодженості думок експертів:

$$S_{d\max}^2 = \frac{1}{12} m^2 \cdot (n^3 - n) . \tag{3.3}$$

Очевидно, що відношення розрахованого значення S_d^2 до максимального дає характеристику погодженості думок експертів:

$$W_q = \frac{S_d^2}{S_{d\max}^2} , \tag{3.4}$$

Повна погодженість поглядів експертів відповідає W_q = 1, а повна її відсутність W_q = 0. Величина W_q дістала назві коефіцієнт конкордації і вона є однозначною числовою оцінкою погодженості думок експертів. Для всіх значень W_q, відмінних від 0 та 1 узгодженість думок експертів перевіряють методами перевірки статистичних гіпотез. Установлено, що величина:

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \frac{(m-1) W_q}{m^2 (n^3 - n)} \tag{3.5}$$

має розподіл Фішера для числа ступенів вільності $f_1 = n - 1 - \frac{2}{m}$, $f_2 = (m-1) \cdot f_1$, тобто якщо $\Phi > F_t(f_1, f_2, \gamma)$ то погляди експертів вважають погодженими з рівнем значущості γ. Для випадку $n \geq 7$ перевірка гіпотези дещо спрощується. Величина $\Phi = m \cdot (n-1) \cdot W_q$ має χ^2-розподіл з числом ступенів вільності $f = n - 1$. Тоді, якщо $\Phi > \chi_t^2(f, \gamma)$, то погляди експертів вважають погодженими з рівнем значущості γ.

За наявності дробових рангів розрахунок W_q ведуть за формулою:

$$W_q = \frac{12S(d^2)}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i}, \tag{3.6}$$

де $T_i = \sum_{v=1}^{p}\left(t_v^3 - t_v\right)$ – показник, що враховує дробові ранги; t_v – число однакових рангів у ранжуванні i-го експерта.

Вибір оптимального варіанту проводиться наступним чином. Сумарне зважене ранжування альтернативних варіантів визначається з матриці VX:

$$VX = \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} V_q X_{q_j}^{i}. \tag{3.7}$$

і тоді оптимальний варіант: $S_{opt} \to \min_j \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{m} V_q X_{q_j}^{i}$

Приклад виконання роботи

Представимо послідовність аналізу результатів за допомогою додатку *Excel* програмного пакету *Microsoft Office*.

Розглянемо наступний варіант завдання (таблиці 3.1, 3.2):

Таблиця 3.1 – Результати ранжування властивостей

Експерти	*Властивості*				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	2	5	4	1	3
2	1	4	4	2	4
3	1	5	5	2	2
4	2	5	4	1	3

Таблиця 3.2 – Результати ранжування іонообмінних смол за властивостями

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	5	2	3	1	3	2	1	5	4	3	2	4	1	5	5	2	2	5	1	4	4	1	4	2
3	5	2	4	1	5	1	2	2	5	4	1	4	2	4	5	4	1	3	2	5	3	1	4	2
4	5	2	3	1	4	1	2	3	5	4	2	5	1	3	5	3	1	4	2	4	4	2	4	1
5	4	2	3	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	5	4	1	3	2	4	4	1	4	2

Виправимо результати ранжування властивостей іонообмінних смол так у відповідності до правил теорії рангової кореляції стосовно значень дробових рангів. Аналогічно виправимо результати ранжування іонообмінних смол за їх властивостями. Результати виправлень зведемо в таблиці 3.3 і 3.4. Результати ранжування інших варіанті виправлення не потребують.

Таблиця 3.3 – Виправлені дані таблиці 3.1

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	5	4	1	3
1	4	4	2	4
1	4,5	4,5	2,5	2,5
2	5	4	1	3

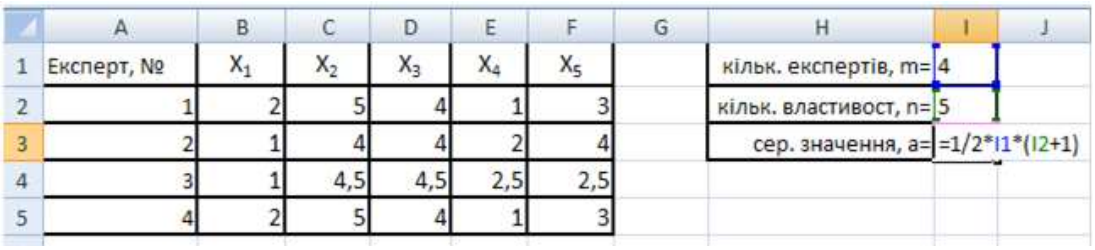
Таблиця 3.4 – Виправлені дані таблиці 3.2

X_2					X_4				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
3	2	1	5	4	4,5	2,5	2,5	4,5	1
5	1	2,5	2,5	5	5	4	1	3	2
4	1	2	3	5	5	3	1	4	2
4	2	1	4	4	5	4	1	3	2

Виправлені результати ранжувань вмістимо на робочий аркуш *Excel*. Позначивши кількість експертів *m*, а кількість ознак за *n* занесемо на робочий аркуш *m* = 4, *n* = 5 Розрахуємо середнє значення по всій таблиці за формулою:

$$a = \frac{1}{2}m(n+1)$$

На аркуші це набуде наступного вигляду (рис. 3.1):



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Експерт, №	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		кільк. експертів, m=	4	
2	1	2	5	4	1	3		кільк. властивост, n=	5	
3	2	1	4	4	2	4		сер. значення, a=	=1/2*I1*(I2+1)	
4	3	1	4,5	4,5	2,5	2,5				
5	4	2	5	4	1	3				

Рисунок 3.1. Фрагмент аркуша *Microsoft Excel*

За результатами ранжування властивостей сорбентів (табл. 3.3) проведемо перевірку узгодженості думок окремих експертів, для цього перш за все рахуємо суму квадратів відхилення за формулою (3.2).

В програмі *Excel* це набуває наступного вигляду (рисунок 3.2).

Для розрахунку показника, що враховує дробові ранги у даному випадку маємо три однакові думки для 2-го експерта та дві по дві для 3-го.

$$T_i = (3^3 - 3) + 2(2^3 - 2) = 36$$

Визначення значень $S^2_{d\max}$ і W_q помістимо на аркуш *Excel* формули (3.4) і (3.3) відповідно. Результати зображено на рисунку 3.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Експерт, №	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		кільк. експертів, m=	4
2	1	2	5	4	1	3		кільк. властивост, n=	5
3	2	1	4	4	2	4		сер. значення, a=	=1/2*I1*(I2+1)
4	3	1	4,5	4,5	2,5	2,5			
5	4	2	5	4	1	3			
6									
7									
8	SumXqj	=СУММ(B2:B5)	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)	=СУММ(F2:F5)			
9	SumXqj-a	=B8-$I$3	=C8-$I$3	=D8-$I$3	=E8-$I$3	=F8-$I$3			
10	(SumXqj-a)^2	=B9^2	=C9^2	=D9^2	=E9^2	=F9^2		Sd2=	=СУММ(B10:F10)
11	1/SumXqj	=1/B8	=1/C8	=1/D8	=1/E8	=1/F8		suma=	=СУММ(B11:F11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Експер	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		кільк. експертів, m=	4
2	1	2	5	4	1	3		кільк. властивост, n=	5
3	2	1	4	4	2	4		сер. значення, a=	12
4	3	1	4,5	4,5	2,5	2,5			
5	4	2	5	4	1	3			
6									
7									
8	SumXqj	6	18,5	16,5	6,5	12,5			
9	SumXqj	-6	6,5	4,5	-5,5	0,5			
10	(SumXq	36	42,25	20,25	30,25	0,25		Sd2=	129
11	1/SumX	0,16667	0,0541	0,0606	0,1538	0,08		suma=	0,515173

Рисунок 3.2. Фрагмент аркуша *Microsoft Excel*, розрахунок сум.

H	I	J	K	L
кільк. експертів, m=	4			
кільк. властивост, n=	5			
сер. значення, a=	=1/2*I1*(I2+1)			
			Ti=	=(3^3-3)+2*(2^3-2)
Sd2=	=СУММ(B10:F10)		S2dmax	=(1/12)*(I1^2*(I2^3-I2)-I1*L9)
suma=	=СУММ(B11:F11)		Wq=	=I10/L10

H	I	J	K	L
кільк. експертів, m=	4			
кільк. властивост, n=	5			
сер. значення, a=	12			
			Ti=	36
Sd2=	129		S2dm	148
suma=	0,51517		Wq=	0,87162

Рисунок 3.3. Фрагмент аркуша *Microsoft Excel*, розрахунок коефіцієнта конкордації за (3.6).

Оскільки кількість альтернативних варіантів менше семи, для перевірки гіпотези про значущість коефіцієнта конкордації розрахуємо величину Ф, що підпорядковується розподілу Фішера (3.5). Для розрахунку значення Ф в довільній комірці введемо формулу:

=1/2*-LN((I1-1)*L11/(I1^2*(I2^3-I2)))

В результаті обчислень з'явиться результат 3,299. Розрахункове значення визначимо для $f_1 = n - 1 - \frac{2}{m} = 3{,}5, f_2 = (m-1)f_1 = 10{,}5$ і $\gamma = 0{,}05$ – прийнятий рівень значущості. Значення розподілу Фішера розрахуємо в *Excel* за допомогою вбудованої функції. В довільну вільну комірку робочого листа записуємо функцію:

=FРАСПОБР(0,05; 3,5; 10,5)

В результаті обчислень з'явиться результат 3,71. $\Phi < F$ – отже оцінки експертів узгоджені.

Розрахуємо нормовані ваги властивостей за формулою (3.1). Розрахунок в *Microsoft Excel* та його результати представлено на рисунку 3.4.

8	SumXqj	=СУММ(B2:B5)	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)	=СУММ(F2:F5)		
9	SumXqj-a	=B8-$I$3	=C8-$I$3	=D8-$I$3	=E8-$I$3	=F8-$I$3		
10	(SumXqj-a)^2	=B9^2	=C9^2	=D9^2	=E9^2	=F9^2	Sd2=	=СУММ(B10:F10)
11	1/SumXqj	=1/B8	=1/C8	=1/D8	=1/E8	=1/F8	suma=	=СУММ(B11:F11)
12								
13	Vq=	=B11/$I$11	=C11/$I$11	=D11/$I$11	=E11/$I$11	=F11/$I$11	suma=	=СУММ(B13:F13)

8	SumXqj	6	18,5	16,5	6,5	12,5		
9	SumXqj-a	-6	6,5	4,5	-5,5	0,5		
10	(SumXqj-a)^2	36	42,25	20,25	30,25	0,25	Sd2=	129
11	1/SumXqj	0,1667	0,0541	0,0606	0,1538	0,08	suma=	0,51517
12								
13	Vq=	0,3235	0,1049	0,1176	0,2986	0,1553	suma=	1

Рисунок 3.4. Фрагмент аркуша *Microsoft Excel*, розрахунок нормованих ваг показників.

Таким чином зважені значення показників V_q (таблиця 3.5):

Таблиця 3.5 – Зважені значення показників

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
0,3235	0,1049	0,1176	0,2986	0,1553

Розрахуємо коефіцієнти конкордації для ранжувань варіантів іонообмінних смол. Фрагмент розрахунку представлено на рисунку 3.5.

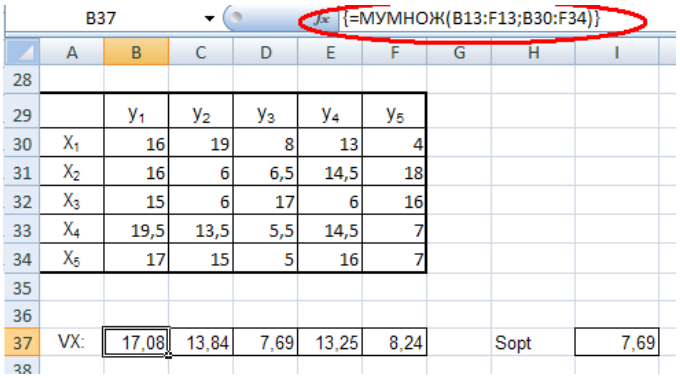
19		X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
20		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
21		4	5	2	3	1	3	2	1	5	4	3	2	4	1	5	4,5	2,5	2,5	4,5	1	4	4	1	4	2
22		3	5	2	4	1	5	1	2,5	2,5	5	4	1	4	2	4	5	4	1	3	2	5	3	1	4	2
23		4	5	2	3	1	4	1	2	3	5	4	2	5	1	3	5	3	1	4	2	4	4	2	4	1
24		5	4	2	3	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	5	4	1	3	2	4	4	1	4	2
25																										
26	SumXqiYi	16	19	8	13	4	16	6	6,5	14,5	18	15	6	17	6	16	19,5	13,5	5,5	14,5	7	17	15	5	16	7
27	(SumXqiYi-a)^2	16	49	16	1	64	16	36	30,3	6,25	36	9	36	25	36	16	56,3	2,25	42,3	6,25	25	25	9	49	16	25

Рисунок 3.5. Фрагмент аркуша *Microsoft Excel*, розрахунок коефіцієнта конкордації при ранжуванні альтернативних варіантів.

Побудуємо таблицю сумарних рангів (табл. 3.6). Таблицю значень *VX* розраховуємо за формулою (3.7) засобами *Excel* за допомогою вбудованих функцій, що виглядає наступним чином (рис. 3.6):

Таблиця 3.6 – Сумарні ранги.

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
X_1	16	19	8	13	4
X_2	16	6	6,5	14,5	18
X_3	15	6	17	6	16
X_4	19,5	13,5	5,5	14,5	7
X_5	17	15	5	16	7



B37 {=МУМНОЖ(B13:F13;B30:F34)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
28									
29		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5			
30	X_1	16	19	8	13	4			
31	X_2	16	6	6,5	14,5	18			
32	X_3	15	6	17	6	16			
33	X_4	19,5	13,5	5,5	14,5	7			
34	X_5	17	15	5	16	7			
35									
36									
37	VX:	17,08	13,84	7,69	13,25	8,24		Sopt	7,69
38									

Рисунок 3.6. Фрагмент аркуша *Microsoft Excel*, матриця *VX*.

Очевидно, що мінімальний сумарний зважений ранг 7,69 відповідає третьому варіанту. Таким чином, за результатами обробки експертиз оптимальним є СХ-97.

Контрольні запитання

1. З якою метою проводиться опитування експертів при прийнятті технологічних рішень. В яких випадках до нього звертаються?
2. Як відбувається ранжування альтернативних варіантів по певній ознаці?
3. Що таке коефіцієнт конкордації? Як він розраховується? Які властивості притаманні цій величині?
4. В яких випадках з'являються дробові ранги? Як змінюється формула для розрахунку коефіцієнта конкордації за наявності дробових рангів?
5. В яких випадках думки експертів вважаються погодженими? Як перевіряється гіпотеза про узгодженість думок експертів? До чого призводить непогодженість думок експертів?
6. Вкажіть алгоритм вибору оптимального рішення при погоджених думках експертів.

Література до роботи: [5]

Практична робота 4

Оцінювання впливу думок окремих експертів на результати експертного опитування

Мета роботи – виробити уміння і досвід проводити обробку результатів опитування колективу експертів для виділення експертів з оригінальними думками.

Завдання

За результатами ранжування п'яти альтернативних варіантів, проведеного чотирма експертами:

1. Виправити результати ранжування у відповідності до правил теорії рангової кореляції.
2. Визначити експерта з найбільш оригінальною думкою.
3. Розділити експертів на дві рівні за кількістю групи за наближеністю їх поглядів.

   Початкові дані для розрахунків подано у додатку В, таблиця В.1 за варіантами.

Основні теоретичні положення

Як відомо, числовою характеристикою погодженості думок експертів, є відношення сумарного квадратичного відхилення рангів, розрахованого за результатами ранжування S_d^2 до максимального можливого сумарного квадратичного відхилення, також відома як коефіцієнт конкордації:

$$W_q = \frac{S_d^2}{S_{d\max}^2}, \tag{4.1}$$

Сумарне квадратичне відхилення визначається як:

$$S_d^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} X_j^i - a\right)^2, \tag{4.2}$$

де X_j^i – ранг j-го альтернативного варіанту, j = 1, 2, …, n; приписаний i-м експертом, i = 1, 2, …, m; n – кількість альтернативних варіантів, m – кількість експертів, a – середній ранг:

$$a = \frac{1}{2} m \cdot (n+1) \tag{4.3}$$

Максимально можливе значення S_d^2, тобто значення, яке відповідає повній погодженості думок експертів:

$$S_{d\max}^2 = \frac{1}{12}\left(m^2 \cdot (n^3 - n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i \right) \tag{4.4}$$

де $T_i = \sum_{v=1}^{p}\left(t_v^3 - t_v\right)$ – показник, що враховує дробові ранги; p – кількість дробових рангів у ранжуванні i-го експерта; t_v – число альтернативних варіантів, яким приписано даний дробовий ранг у ранжуванні i-го експерта. В разі відсутності дробових рангів $T_i = 0$.

Оцінка впливу поглядів окремих експертів на узгодженість поглядів групи експертів проводиться з метою виявлення спеціалістів з найбільш оригінальними думками. Існують різні методи рішення цієї задачі, найпростіший з них – послідовне виключення поглядів одного або декількох експертів з результатів ранжування і розрахунок за результатами ранжувань інших експертів коефіцієнта конкордації W_q. Очевидно, що якщо W_{qi} коефіцієнт конкордації при виключені i-го експерта – значно відрізняється від інших, треба вивчити думку цього експерта окремо.

Група експертів може виділяється за ступенем близькості їх думок. В якості міри близькості може служити будь-яка міра розсіювання. Однією з можливих може бути прийнята міра, запропонована Устюжаніновим:

$$S_{ij} = \frac{2m_{ij}}{n_i \log_2\left(1 + \frac{n_j}{n_i}\right) + n_j \log_2\left(1 + \frac{n_i}{n_j}\right)}, \tag{4.5}$$

де S_{ij} – міра збігу думок i-го і j-го фахівців; m_{ij} – кількість варіантів, однаково оцінюваних i-м і j-м фахівцями; n_i, n_j – кількість варіантів, оцінюваних i-м і j-м фахівцями, відповідно.

За наявності дробових рангів, однаково оціненими можна вважати варіанти, ранги яких відмінні менше ніж на одиницю. Розрахувавши міру збігу Устюжанікова для кожної пари експертів, можна розділити їх на групи за наближеністю думок.

Приклад виконання роботи

Розглянемо наступний варіант завдання (таблиця 4.1). Виправимо результати ранжування (результати третього експерта) у відповідності до правил теорії рангової кореляції стосовно значень дробових рангів (табл. 4.2).

Ранжування інших експертів відповідають правилам рангової кореляції і виправлення не потребують.

Таблиця 4.1 – Результати ранжування властивостей

Експерти	*Властивості*				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	2	5	4	1	3
2	1	4	4	2	4
3	1	5	5	2	2
4	2	5	3	1	4

Таблиця 4.2 – Виправлені дані таблиці 1.1

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	5	4	1	3
1	4	4	2	4
1	4,5	4,5	2,5	2,5
2	5	3	1	4

Розрахуємо доданок T_i для кожного з експертів. В ранжуванні першого і четвертого експерті дробових рангів немає. В ранжуванні другого експерта є один дробовий ранг, приписаний трьом альтернативним варіантам (p = 1; t_v = 3), в ранжуванні другого експерта є два дробові ранги, приписані двом альтернативним варіантам кожен (p = 2; t_v = 2). Тоді за (4.4):

$$T_1 = 0;\;\; T_2 = \left(2^3 - 2\right) + \left(2^3 - 2\right) = 12;\;\; T_3 = \left(3^3 - 3\right) = 24;\;\; T_4 = 0.$$

Для оцінювання ступені впливу окремого експерта на узгодженість думок групи експертів розрахуємо W_{qi} – коефіцієнт конкордації при виключені i-го експерта. Виключаємо з розгляду першого експерта, тоді:

$$S^2_{d\max} = \frac{1}{12}\left(m^2 \cdot (n^3 - n) - m\sum_{i=1}^{m} T_i\right) = \frac{1}{12}\left(3^2 \cdot (5^3 - 5) - 3\left(12 + 24 + 0\right)\right) = 81.$$

$$a = \frac{1}{2} m \cdot (n+1) = \frac{1}{2} 3 \cdot (5+1) = 9.$$

$$S^2_d = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} X^i_j - a\right)^2 = \left(-5\right)^2 + 4{,}5^2 + 2{,}5^2 + \le \left(-3{,}5\right)^2 + 1{,}5^2 = 66.$$

$$W_q = \frac{S^2_d}{S^2_{d\max}} = \frac{66}{81} \approx 0{,}815.$$

Аналогічно проведено розрахунки коефіцієнта конкордації з виключенням послідовно другого, третього і четвертого експертів. Результати розрахунку зведемо в таблицю 4.3.

Таблиця 4.3 – Розрахунок коефіцієнтів конкордації з послідовним виключенням експертів, учбовий приклад

W_{q1}	W_{q2}	W_{q3}	W_{q4}
0,815	0,869	0,851	0,864

Найбільше значення моє коефіцієнт W_{q2}. Таким чином найбільше оригінальна думка у другого експерта.

З метою розділення експертів на дві групи за ступенем наближеності їх думок скористаємося мірою Устюжанікова (4.5). Наприклад, для першого і третього експертів кількість однаково оцінюваних варіантів m_{ij} = 3 (за наявності дробових рангів, варіанти, ранги яких відмінні менше ніж на одиницю можна вважати однаково оціненими); кількість оцінюваних варіантів n_i,= n_j = 5:

$$S_{ij} = \frac{2m_{ij}}{n_i \log_2\left(1+\frac{n_j}{n_i}\right) + n_j \log_2\left(1+\frac{n_i}{n_j}\right)} = \frac{2\cdot 3}{5\log_2\left(1+\frac{5}{5}\right) + 5\log_2\left(1+\frac{5}{5}\right)} = 0{,}6.$$

Результати розрахунків міри Устюжанікова для інших пар зведено в таблицю 4.4.

Таблиця 4.4 – Результати розрахунків, учбовий приклад

Експерти	1	2	3	4
1	1			
2	0,2	1		
3	0,6	0,8	1	
4	0,8	0,2	0,2	1

Таким чином, дві групи за ступенем наближеності думок утворюють: перша група – перший і четвертий експерти, друга група – другий і третій експерти.

Контрольні запитання

7. З якою метою проводиться опитування експертів при прийнятті технологічних рішень. В яких випадках до нього звертаються?
8. Як відбувається ранжування альтернативних варіантів по певній ознаці?

9. Що таке коефіцієнт конкордації? Як він розраховується? Які властивості притаманні цій величині? В яких випадках думки експертів вважаються погодженими?
10. В яких випадках з'являються дробові ранги? Як враховуються дробові ранги для розрахунку коефіцієнта конкордації?
11. У чому полягає процедура оцінювання дамок окремих експертів? Наведіть алгоритм оцінювання. З якою метою проводиться таке оцінювання?

Література до роботи: [5]

Практична робота 5

Розв’язання задачі оптимізації резервування

Мета роботи – виробити уміння і досвід розв’язування задач оптимізації резервування системи з використанням поняття β-довговічності.

Завдання

Визначити варіант системи резервування (рис. 5.1), для якого час $\overline{T}$, протягом якого система буде залишиться працездатною з ймовірністю не нижче β ($\Pr\{T(x,\xi) \geq \overline{T}\} \geq \beta$) буде максимальним. При цьому вартість системи не повинна перевищувати $c_{\max}$.

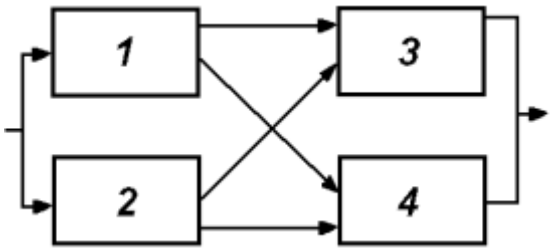


Рисунок 5.1. Схема резервованої системи

Робота кожного елемента системи не залежить від інших елементів. Періоди безвідмовної роботи кожного з елементів є випадковими величинами, що розподілені за нормальним законом за заданими параметрами m_i і σ_i. Вартість кожного елемента складає C_i. Максимальна кількість елементів одного виду – 3 шт.

Початкові дані для розрахунків подано у додатку Г за варіантами.

Основні теоретичні положення

Оскільки працездатність системи забезпечується за працездатності принаймні одного шляху від входу до виходу. Очевидно, що у вказаній у завданні системі таких шляхів існує чотири: 1-4, 1-3, 2-3, 2-4. Тоді структурна функція системи набуває вигляду:

$$\Psi(y) = \max\{y_1 y_4; y_2 y_3; y_1 y_3; y_2 y_4\}. \quad (5.1)$$

В залежності від того, що буде прийнято в якості цільової функції, можливі два шляхи розв’язку задачі оптимізації резервування. У випадку, якщо цільова функція – середній строк служби системи – $M[T(x,\xi)]$ – то задача оптимального резервування зводиться до цілочисельної задачі оптимізації на основі моделей математичного очікування. Якщо ж в якості цільової функції

прийнято β–довговічність, тобто ймовірність того, що в заданий момент часу $\overline{T}$ система залишиться працездатною з ймовірністю не нижче β ($\Pr\{T(x,\xi) \geq \overline{T}\} \geq \beta$), то задача зводиться до задачі стохастичного програмування задачі з імовірнісними обмеженнями. Розглянемо розв'язки кожної в цих задач.

Розв'язок задачі пошуку оптимального середнього строку служби системи ґрунтується на наступній теоремі: для будь-якої резервованої системи величина строку служби системи задовольняє умову $T(x,\xi) \geq t$ тоді і тільки тоді, коли структурна функція системи $\Psi(y(t)) = 1$.

Розглянемо задачу максимізації β–довговічності, тобто максимізації часу $\overline{T}$, протягом якого система буде залишиться працездатною з ймовірністю не нижче β ($\Pr\{T(x,\xi) \geq \overline{T}\} \geq \beta$). Математично така задача ставиться наступним чином:

- знайти: $\max \overline{T}$,
- за обмежень: $\Pr\{f(x,\xi) \geq \overline{T}\} \geq \beta,$ (5.2)

$$C(x) \leq c_{\max}$$

$x_i \geq 1$ – цілочисловий вектор.

де $C(x) \leq c_{\max}$ – це обмеження, які накладаються на вартість системи.

Розв'язок такої задачі також базується на структурній функції системи. Оскільки система залишається працездатною якщо існує принаймні один шлях від входу до виходу, що проходить через працездатні компоненти, то логічно припустити, що β–довговічність системи буде максимальною серед β–довговічностей шляхів «вхід-вихід». Для того, щоб записати критерій оптимальності роботи системи спочатку розглянемо випадок коли резервування відсутнє, тобто в системі присутні лише по одному елементу кожного виду. В такому випадку β–довговічність кожного зі шляхів «вхід-вихід» буде забезпечуватися, якщо загальна ймовірність безвідмовної роботи шляху буде не менша β. Тобто для даного прикладу у випадку відсутності резервування запишемо імовірнісне обмеження:

$$\Pr\{f(\xi) \geq \overline{T}\} = \max\{\Phi(\xi_1)\cdot\Phi(\xi_4); \Phi(\xi_2)\cdot\Phi(\xi_3); \Phi(\xi_1)\cdot\Phi(\xi_3); \Phi(\xi_2)\cdot\Phi(\xi_4);\} \geq \beta, \qquad (5.3)$$

де $\Phi(\xi_i)$ – інтегральна функція розподілу ξ_i, нагадаємо, що ξ_i (i = 1, 2, … n), є, фактично, функцією часу.

Будуючи функцію довговічності слід врахувати, що постійний множник випадкової величини можна винести за знак математичного сподівання, а також за знак дисперсії, попередньо піднісши його до квадрату:

$$M(cX) = c \cdot M(X), \qquad D(cX) = c^2 \cdot D(X) \qquad (5.4)$$

Надалі рішення задачі відбувається наступним чином.

1. Приймаємо $x_1 = 1$, $x_4 = 1$, час $t = 0$, розрахунковий час для компонентів $t_1 = 0$, $t_4 = 0$/
2. Знаходимо t, за якого нерівність $\Phi(\xi_1)\cdot\Phi(\xi_4) \geq \beta$ виконалась востаннє.
3. Знаходимо найменшу з величин $(\Phi(\xi_1), \Phi(\xi_4))$. Якщо меншою буде $\Phi(\xi_1)$ то приймаємо $x_1 = x_1 + 1$, якщо меншою буде $\Phi(\xi_4)$ то приймаємо $x_4 = x_4 + 1$,
4. Перевіряємо допустимість отриманого рішення за (3.8) Якщо рішення недопустиме, то процедуру, аналогічну кроку 3 проводимо для наступного x. Якщо при збільшенні всіх x рішення виявилося недопустимим, переходять до кроку 6
5. Для компонента, кількість якого збільшена на кроці 3 або 4 прийняти розрахунковий час рівний 0 і повернутися до кроку 2.
6. Уточнити час t до заданої точності.
7. Розв'язок закінчено. Результати розв'язку – значення x_1, x_4, t.

Реалізувавши цей алгоритм для всіх можливих шляхів знайдемо оптимальний час і, відповідно оптимальні кількості елементів резервування.

Приклад виконання роботи

Розглянемо наступний учбовий приклад (таблиця 5.1):

Таблиця 5.1 – Початкові дані, учбовий приклад

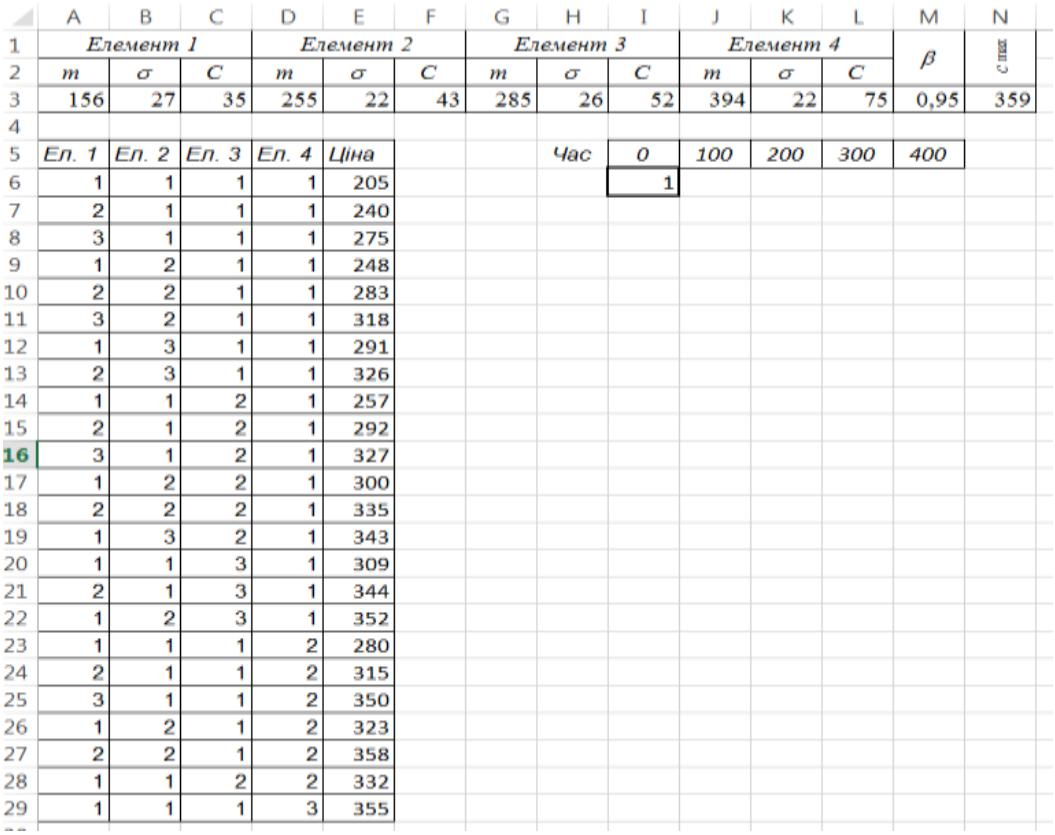
Елемент 1			*Елемент 2*			*Елемент 3*			*Елемент 4*			β	$c_{\max}$
m	σ	C	m	σ	C	m	σ	C	m	σ	C		
156	27	35	255	22	43	285	26	52	394	22	75	0,95	359

Для розв'язання задачі проведемо імітаційний експеримент, тобто зімітуємо роботу різних варіантів системі фільтрації. Складемо план імітаційного експерименту. Оскільки мінімальна кількість елементів кожного виду у системі рівна одному, максимальна – трьом, повний план експерименту буде містити 81 варіант. Для скорочення варіантів скористаємося обмеженням на ціну системи – за умовою учбового завдання не більше 359 одиниць. Варіанти, які залишилися зведемо у таблицю 5.2.

Тепер розробимо модель системи для імітаційного розрахунку у додатку MS Excel. Базою для розроблення моделі буде структурна функція системи (5.1) з урахуванням (5.3). За умовою задачі довговічність роботи розподілена за нормальним законом, тож скористаємося стандартною функцією нормального розподілу MS Excel. План експерименту та початкові дані розмістимо так, як це показано на рисунку 5.2. У рядку 5 передбачимо майбутню вісь часу. Модель будемо вносити у комірку I6.

Таблиця 5.2 – План імітаційного експерименту, учбовий приклад

Ел. 1	*Ел. 2*	*Ел. 3*	*Ел. 4*	*Ціна*
1	1	1	1	205
2	1	1	1	240
3	1	1	1	275
1	2	1	1	248
2	2	1	1	283
3	2	1	1	318
1	3	1	1	291
2	3	1	1	326
1	1	2	1	257
2	1	2	1	292
3	1	2	1	327
1	2	2	1	300
2	2	2	1	335
1	3	2	1	343
1	1	3	1	309
2	1	3	1	344
1	2	3	1	352
1	1	1	2	280
2	1	1	2	315
3	1	1	2	350
1	2	1	2	323
2	2	1	2	358
1	1	2	2	332
1	1	1	3	355



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	*Елемент 1*			*Елемент 2*			*Елемент 3*			*Елемент 4*			*β*	*C max*
2	*m*	*σ*	*C*	*m*	*σ*	*C*	*m*	*σ*	*C*	*m*	*σ*	*C*		
3	156	27	35	255	22	43	285	26	52	394	22	75	0,95	359
4														
5	*Ел. 1*	*Ел. 2*	*Ел. 3*	*Ел. 4*	*Ціна*			*Час*	*0*	*100*	*200*	*300*	*400*	
6	1	1	1	1	205				1					
7	2	1	1	1	240									
8	3	1	1	1	275									
9	1	2	1	1	248									
10	2	2	1	1	283									
11	3	2	1	1	318									
12	1	3	1	1	291									
13	2	3	1	1	326									
14	1	1	2	1	257									
15	2	1	2	1	292									
16	3	1	2	1	327									
17	1	2	2	1	300									
18	2	2	2	1	335									
19	1	3	2	1	343									
20	1	1	3	1	309									
21	2	1	3	1	344									
22	1	2	3	1	352									
23	1	1	1	2	280									
24	2	1	1	2	315									
25	3	1	1	2	350									
26	1	2	1	2	323									
27	2	2	1	2	358									
28	1	1	2	2	332									
29	1	1	1	3	355									

Рисунок 5.2. Лист MS Excel, підготовлений до імітаційного експерименту.

Сама модель набуває вигляду:

```
=ЕСЛИ(ИЛИ((1-НОРМРАСП(I$5;$A6*$A$3;$A6*$B$3;1))*
(1-НОРМРАСП(I$5;$D6*$J$3;$D6*$K$3;1)>$M$3);
(1-НОРМРАСП(I$5;$B6*$D$3;$B6*$E$3;1))*
(1-НОРМРАСП(I$5;$C6*$G$3;$C6*$H$3;1)>$M$3);
(1-НОРМРАСП(I$5;$A6*$A$3;$A6*$B$3;1))*
(1-НОРМРАСП(I$5;$C6*$G$3;$C6*$H$3;1)>$M$3);
(1-НОРМРАСП(I$5;$B6*$D$3;$B6*$E$3;1))*
(1-НОРМРАСП(I$5;$D6*$J$3;$D6*$K$3;1)>$M$3));1;0)
```

У рядку I, починаючи з комірки I5 внесена вісь часу. В стовпцях A, B, C, D (з відповідними номерами) внесений план експерименту, тобто кількість елементів кожного виду. У комірках A3, B3 параметри нормального розподілу (математичне очікування і середньоквадратичне відхилення) для першого елементу системи, у D3, E3, тож саме для другого елементу і т.д. В комірці M3 введена гранична ймовірність (β). Оскільки задано ймовірність з якою система буде залишиться працездатною то необхідно у формулу вводити одиницю мінус значення інтегральної функції нормального розподілу.

Наведена модель за виконання умови працездатності системи з ймовірністю не нижче заданої буде повертати одиницю, в іншому випадку нуль.

Проведемо імітаційний експеримент. Поступово збільшуємо час роботи, доки не знаходимо час, коли всі системі фільтрування перестають працювати. Як тільки це станеться – повертаємося назад і зменшуємо крок по часу. Імітаційний експеримент завершується, коли буде визначено час роботи системи фільтрування з заданою надійністю і точністю до 1 години. Результати експерименту до учбового прикладу подано на рисунку 5.3.

За результатами імітаційного експерименту встановлено, що найбільшу довговічність мають дві системи фільтрування:

1) два елементи першого типу, один елемент другого типу, три елементи третього типу, один елемент четвертого типу;
2) один елемент першого типу, два елементи другого типу, три елементи третього типу, один елемент четвертого типу.
3) Тривалість роботи обох таких систем з надійністю не нижче 95% складає 727 годин. Оптимальною слід вважати першу з двох вказаних систем фільтрування, оскільки її ціна нижча.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Елемент 1			Елемент 2			Елемент 3			Елемент 4			β	$C_{\text{екв}}$								
2	m	σ	C	m	σ	C	m	σ	C	m	σ	C										
3	156	27	35	255	22	43	285	26	52	394	22	75	0,95	359								
4																						
5	Ел. 1	Ел. 2	Ел. 3	Ел. 4	Ціна			Час	0	100	200	300	400	500	600	650	700	710	720	725	726	727
6	1	1	1	1	205				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	2	1	1	1	240				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	3	1	1	1	275				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	2	1	1	248				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	2	2	1	1	283				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	3	2	1	1	318				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	3	1	1	291				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	2	3	1	1	326				1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	1	2	1	257				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	2	1	2	1	292				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	3	1	2	1	327				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	2	2	1	300				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	2	2	2	1	335				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	3	2	1	343				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1	3	1	309				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	**2**	**1**	**3**	**1**	**344**				**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
22	**1**	**2**	**3**	**1**	**352**				**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**
23	1	1	1	2	280				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	2	1	1	2	315				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
25	3	1	1	2	350				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
26	1	2	1	2	323				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
27	2	2	1	2	358				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
28	1	1	2	2	332				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	1	3	355				1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 5.3. Лист MS Excel з результатами виконання учбового прикладу.

Контрольні запитання

1. Що таке стохастичне програмування? В якому випадку виникають задачі, що відносять до стохастичного програмування?
2. Які типи задач стохастичного програмування вам відомі? Чим вони відрізняються між собою?
3. До якого типу задач стохастичного програмування відноситься задача, що вирішувалася в даній роботі? Чому?
4. У чому полягає задача оптимізації резервування? Як вона математично формулюється?
5. Що таке структура функція системи? Як вона пов’язана з умовою працездатності? Для чого застосовується ця функція?
6. Що таке β-довговічність? Як застосовується це поняття для вирішення поставленої в роботі задачі?

Практична робота 6

Побудова множин оцінок параметрів адекватної інтервальної моделі

Мета роботи – виробити уміння і досвід побудови та аналізу множини оцінок параметрів моделей в задачах оптимізації зі статистичною невизначеністю.

Завдання

За даними про інтервали значень функції *y* для заданих значень *x* за варіантами:

1. Побудувати ряд лінійних адекватних моделей (4-5 моделей).
2. Графічно побудувати множину Ω оцінок параметрів лінійної моделі та визначити її діаметр Ω.
3. Побувати призми $П^+$ і $П^-$, які апроксимують множину Ω. Для побудови призми $П^-$ прийняти за точкову оцінку коефіцієнтів усереднену оцінку, коефіцієнт α визначити самостійно.
4. Визначити інтервали параметрів лінійної моделі, виходячи з призм $П^+$ і $П^-$ і записати отримані моделі.

Початкові дані для розрахунків подано у додатку Д за варіантами.

Основні теоретичні положення

Адекватною інтервальною моделлю об'єкту є будь-яка функція, $\hat{y}(x)=\vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b}$, що проходить через усі інтервали вимірювань, як показано на рисунку 6.1, тобто задовольняє умові:

$$y_i^- \le \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b} \le y_i^+,\ i=1...N \tag{6.1}$$

де $\vec{\varphi}^T(\vec{x})$ – вектор базисних функцій; $\vec{b}$ – вектор параметрів; y_i^-, y_i^+ задають для *i*-ого досліду (за фіксованого вектора $\vec{x}_i$) межі можливих значень істинної величини $y_0(\vec{x}_i)$

Вираз (6.1), після підстановки в нього результатів експериментів, перетворюється на систему *N* лінійних нерівностей з *m* змінними $b_1 \ldots b_m$. Очевидно, що ця система має бути сумісною. Тоді множина її розв'язків буде визначатися так:

$$\Omega_b = \left\{\vec{b} \in R^m \mid y_i^- \le \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b} \le y_i^+,\ i=1...N\right\}. \tag{6.2}$$

Підставивши будь-який вектор $\vec{b} \in \Omega_b$ у рівняння $\hat{y}(x)=\vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b}$, отримаємо адекватну модель об'єкту. Це значить, що Ω_b являє собою множину параметрів

адекватних інтервальних моделей, тобто ця множина є аналогом довірчої області значень коефіцієнтів в регресійному аналізі; $p(\Omega) = \max|b_i - b_j|$, $b_i, b_j \in \Omega$ – діаметр множини Ω (рисунок 6.2).

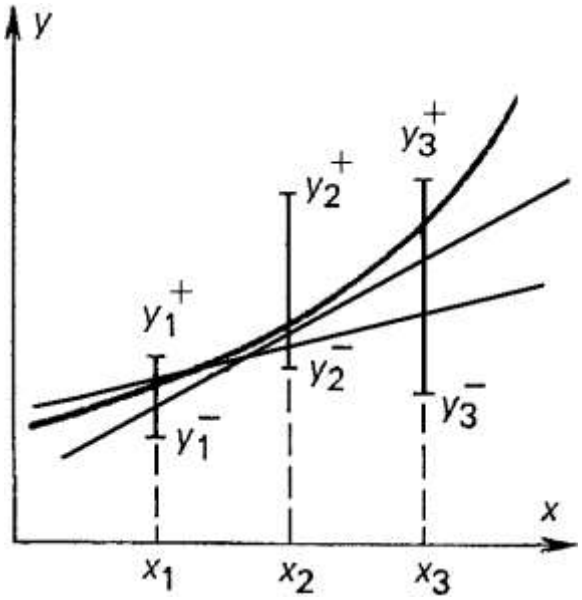


Рисунок 6.1. Адекватні інтервальні моделі об'єкту.

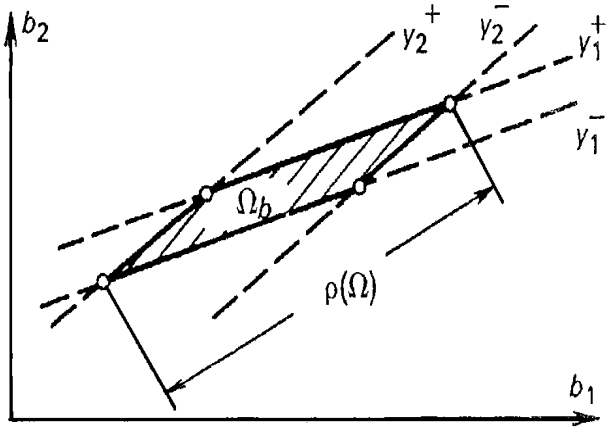


Рисунок 6.2. Множина Ω можливих значень параметрів та її діаметр.

При побудові інтервальних моделей часто зручно замінити множину Ω прямокутною гіперпризмою:

$$\Pi^+ = \left\{\vec{b} \in R^m \mid b_i^- \le b_i \le b_i^+,\ i = 1...m\right\} \tag{6.3}$$

Граничні точки b_i^-, b_i^+ є межами інтервалів оцінок коефіцієнтів моделі. Їх можна визначити шляхом розв'язку задач лінійного програмування: $b_i^- = \min\limits_{b \in \Omega} b_i$, $b_i^+ = \max\limits_{\vec{b} \in \Omega} b_i$.

Призма для двомірного випадку зображена на рис. 6.3. Неважко побачити, що $\Pi^+ \supset \Omega$, тобто призма Π^+ містить «зайві» точки $\vec{b}$, що не задовольняють умові (6.2). Якщо задана деяка точкова оцінка коефіцієнтів $\vec{b}^{**}$, то можна побудувати іншу наближуючи гіперпризму Π^-, як показано на рис. 6.3.

Інтервал значень коефіцієнтів в цьому випадку можна визначити за умовою: $b_I^- = \min_{\alpha\in\Omega}\left(b_i^{**} - \alpha\right)$, $b_I^+ = \max_{\alpha\in\Omega}\left(b_i^{**} - \alpha\right)$.

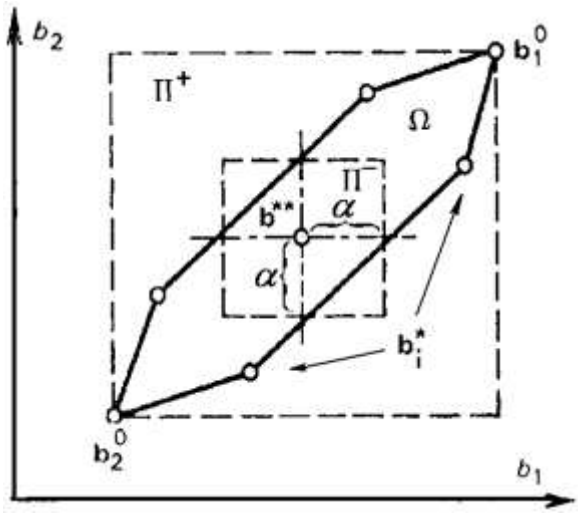


Рисунок 6.3. Заміна множини Ω призмами Π^- і Π^+.

Очевидно, що якщо сама множина Ω є прямокутною призмою, то $\Pi^+ = \Pi^- = \Omega$. В усіх інших відпадках відмінність множини Ω і призмами Π^- і Π^+ може бути достатньо суттєвою. Якщо використати апроксимацію множини Ω і призмами Π^- або Π^+, інтервальну модель можна записати простіше,:

$$[y(\vec{x})] = [b_1]\varphi_1(\vec{x}) + [b_2]\varphi_2(\vec{x}) + ... + [b_m]\varphi_m(\vec{x})$$

де $[b_i] = [b_i^-, b_i^+]$ – інтервальні значення коефіцієнтів.

Таким чином, замінивши множину допустимих значень коефіцієнтів апроксимуючими її гіперпризмами можна перейти від інтервальних значень вихідної змінної до інтервальних значень коефіцієнтів, а, отже, побудувати інтервальну математично модель досліджуваного об’єкту.

Приклад виконання роботи

В якості початкових даних скористаємося наступним прикладом (табл. 6.1):

Таблиця 6.1 – Початкові дані, учбовий приклад.

x	y^-	y^+
2	6	9
4	8	11
6	12	15

Для подальших пояснень зобразимо учбовий приклад графічно і пронумеруємо точки (рис. 6.4)

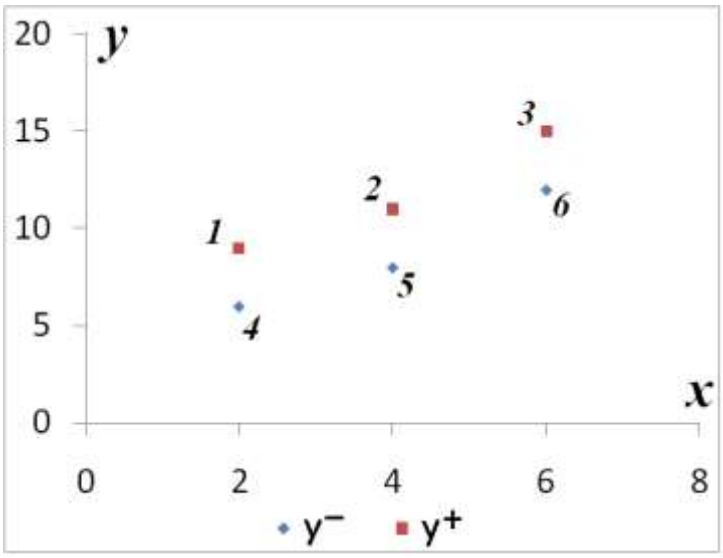


Рисунок 6.4. Початкові дані, учбовий приклад.

Для побудови множини допустимих значень параметрів Ω необхідно визначити її крайні точки (див. рис. 6.2, 6.3). Зазначимо, що координатами будь-якої точки, що належить множині Ω, у лінійному випадку ($y = b_0 + b_1x$), є значення коефіцієнтів b_0 і b_1 однієї адекватної моделі об'єкту (див. рис. 6.1). Крайніми точками будуть ті, для яких значення одного з коефіцієнтів буде максимальним або мінімальним, а графіки таких моделей будуть проходити через крайні точки обмежень значень вихідної змінної.

Для знаходження вищевказаних значень параметрів моделей побудуємо рівняння прямих, що проходять через всі можливі пари точок обмежень (див. рис. 6.4). Виходячи з рисунку, такими парами точок будуть (1; 2), (1; 6), (2; 3), (3; 4), (4; 6). Провести рафік адекватної моделі за інтервальними даними через інші пари точок у прикладі, який розглядається, неможливо (наприклад лінійна модель, побудована за точками 1 і 3 не буде задовольняти обмеженням у $x = 4$). Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки задані своїми координатами і записуємо вказані моделі. Результати розрахунків зведемо в таблицю 6.2.

Таблиця 6.2 – Значення параметрів адекватних моделей, учбовий приклад

Точки	b_0	b_1
(1; 2)	4	1
(1; 6)	1,5	2,25
(2; 3)	0	2
(3; 4)	7,5	0,75
(4; 6)	6	1,5

Нанесемо ці точки на графік та з'єднаємо їх так, що утворився опуклий багатокутник. Цей багатокутник буде графічним зображенням множини допустимих значень Ω (рисунок 6.5).

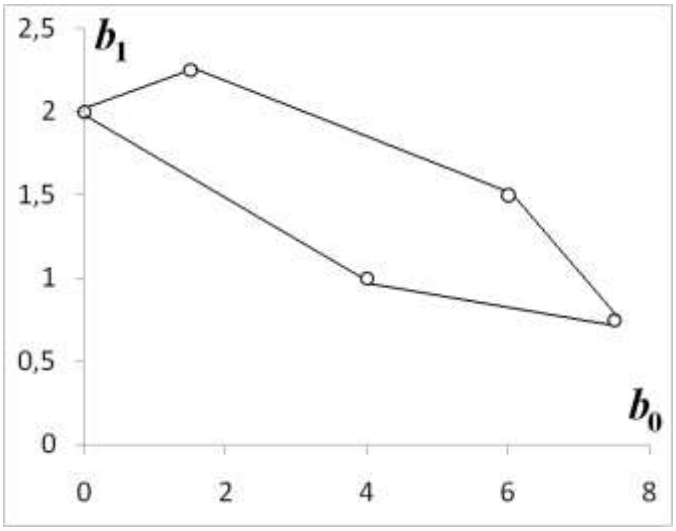


Рисунок 6.5. Область допустимих значень Ω, учбовий приклад.

Очевидно, що центром цієї області буде точка з координатами (3,8; 1,5). Відповідно до правил побудови більшої гіперпризми $П^+$ (див. рис. 6.3), вона має включати всю область допустимих значень параметрів. У прикладі, що розглядається, цією гіперпризмою в даному випадку буде прямокутник з координатами лівого нижнього кута (0; 0,75) та правого верхнього кута (7,5; 2,25). Таким чином гіперпризма $П^+$:

$$П^+ = \begin{cases} 0 \le b_0 \le 7,5 \\ 0,75 \le b_1 \le 2,25 \end{cases}.$$

Для побудови меншої гіперпризми $П^-$, приймемо плечовий коефіцієнт α рівний 20% розміру відповідного ребра гіперпризми $П^+$, тобто $\alpha_0 = 1,5$; $\alpha_1 = 0,3$. Використавши центральну точку області Ω, побудуємо гіперпризму . Вона буде являти собою прямокутник з координатами лівого нижнього кута (2,3; 1,2) та правого верхнього кута (5,3; 1,8). Таким чином гіперпризма $П^-$:

$$П^- = \begin{cases} 2,3 \le b_0 \le 5,3 \\ 1,2 \le b_1 \le 1,8 \end{cases}$$

Побудовані гіперпризми зображено на рисунку 6.6.

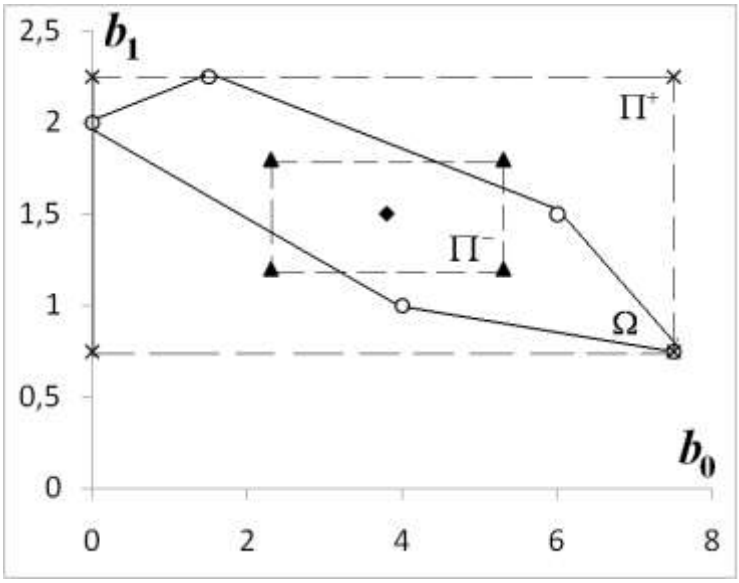


Рисунок 6.6. Множина Ω і призмами Π^- і Π^+, учбовий приклад.

Таким чином, інтервальні моделі набувають вигляду:

$$[y(\vec{x})] = [0; 7.5] + [0.75; 2.25]x;$$
$$[y(\vec{x})] = [2.3; 5.3] + [1.2; 1.8]x.$$

Контрольні запитання

1. Що таке статистичне невизначеність? У яких випадках вона виникає?

2. Що таке інтервальна експериментально-статистична модель? Для розв'язку яких задач використовуються інтервальні моделі?

3. Чому у загальному випадку для побудови математичних моделей неможна обмежитися точковими оцінками коефіцієнтів?

4. Що таке множину Ω? Гіперпризми Π^+ і Π^-? Для чого вони застосовуються?

5. Поясніть алгоритм переходу від інтервальних значень функції відгуку до інтервальних значень параметрів моделей.

Практична робота 7

Оптимізація роботи парогенератора за інтервальним моделями

Мета роботи – виробити уміння і досвід визначення оптимальних умов проведення технологічних процесів, які досліджуються в умовах статистичної невизначеності.

Завдання

За побудованою інтервальною моделлю парогенератора визначити оптимальний режим його роботи. Прийняти, що реальна функція, що описує даний процес є лінійно-параметризованою функцією у визначених межах.

В якості початкових даних прийняти модель, побудовану за результатами виконання лабораторної роботи «*Визначення оптимального режиму роботи парогенератора за інтервальними моделями*» даного кредитного модуля.

Основні теоретичні положення

Задача оптимізації в умовах статистичної невизначеності, вирішується на основі інтервальної моделі, яку можна записати так:

$$\left[y\left(\vec{x}\right)\right]=\left[\beta_1\right]\varphi_1\left(\vec{x}\right)+\left[\beta_2\right]\varphi_2\left(\vec{x}\right)+...+\left[\beta_m\right]\varphi_m\left(\vec{x}\right),$$

де $\left[\beta_i\right]=\left[\beta_i^-,\beta_i^+\right]$. Граничні точки β_i^-, β_i^+ є межами інтервалів оцінок коефіцієнтів моделі. Граничні точки β_i^-, β_i^+ можна визначити шляхом розв'язку задач лінійного програмування:

$$y_i^- \le \vec{\varphi}^T\left(\vec{x}\right)\vec{\beta} \le y_i^+,\ i=1...N$$

$$\beta_i^- = \min_{\beta\in\Omega}\beta_i,\ \beta_i^+ = \max_{\beta\in\Omega}\beta_i. \qquad (7.1)$$

де: Ω – опукла множина допустимих значень коефіцієнтів; y_i^-, y_i^+ – верхня та нижня межі інтервалу вимірювань.

Найбільш доцільно задати вектор базисних функцій $\vec{\varphi}^T\left(\vec{x}\right)$ як множину функцій поліному другого порядку для заданої кількості змінних. Зокрема, для випаду двох змінних модель набуває вигляду:

$$\left[y\left(\vec{x}\right)\right]=\left[\beta_0\right]+\left[\beta_1\right]x_1+\left[\beta_2\right]x_2+\left[\beta_{12}\right]x_1x_2+\left[\beta_{11}\right]x_1^2+\left[\beta_{22}\right]x_2^2. \qquad (7.2)$$

Припустимо, що задача оптимізації зведена до вигляду $\min_{x \in X}[f(x)]$, де X – точно відома допустима множина; $[f(x)] = [f^-(x), f^+(x)]$ – критерій, у формі інтервальної моделі, заданої межами коридору $f^-(x)$ і $f^+(x)$ можливих значень невідомого дійсного критерію $f_0(x)$.

Нехай дійсний критерій $f_0(x)$ належить деякому класу функцій F і задовольняє умові:

$$f^-(x) \le f_0(x) \le f^+(x) \qquad \forall x \in X, \qquad f_0(x) \in F.$$

Ця умова породжує на множині X множину функцій $f_0(x) \in F \mid f^-(x) \le f_0(x) \le f^+(x)$, кожна із яких може співпадати із невідомим дійсним критерієм $f_0(x)$, і не можна віддати перевагу жодній з них.

У випадку, коли $f(x) \in [f(x)]$ є лінійно-параметризованою функцією відомого вигляду, тобто $f(x) = \varphi^T(x)\beta$, де $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ – вектор параметрів; $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T$ – вектор базисних функцій відомого вигляду.

Нехай невизначеність критерію пов'язана з інтервальною невизначеністю його параметрів β, тобто відомо тільки, що $\beta \in [\beta]$, де $[\beta] = (\beta_1^- \le \beta_1 \le \beta_1^+, \dots, \beta_m^- \le \beta_m \le \beta_m^+)$ – області можливих значень параметрів β, задані відповідними межами. З урахуванням цього можна записати критерій у вигляді інтервально заданої функції відомого вигляду:

$$[y(\vec{x})] = [\beta_1]\varphi_1(x) + \dots + [\beta_m]\varphi_m(x).$$

Якщо модель критерію є квадратичною функцією виду (7.2) для двох факторів: x_1 і x_2, для зручності подальшого аналізу її доцільно записати у вигляді:

$$[y(\vec{x})] = [\beta_0] + x^T[c] + x^T[W]x,$$

де вектор $[c]$ і матриця $[W]$ задані інтервально:

$$[c] = \begin{pmatrix} [\beta_1^-; \beta_1^+] \\ [\beta_2^-; \beta_2^+] \end{pmatrix}; \tag{7.3}$$

$$[W] = \begin{bmatrix} [\beta_{11}^-; \beta_{11}^+] & 0.5[\beta_{12}^-; \beta_{12}^+] \\ 0.5[\beta_{12}^-; \beta_{12}^+] & [\beta_{22}^-; \beta_{22}^+] \end{bmatrix}. \tag{7.4}$$

Тоді екстремум функції:

$$[x^0] = -0.5[W]^{-1}[c], \qquad (7.5)$$

Для побудови $[x^0]$ можна скористатися методами рішення систем лінійних рівнянь виду $Wx = c$ з інтервально заданими матрицею W і вектором c.

За наявності обмежень на змінні, множина рішень задачі, які не покращуються, є перетини допустимої множини X і множини $[x^0]$ безумовних максимумів функції:

$$[X_0] = X \cap [x^0].$$

Для вирішення системи лінійних рівнянь слід врахувати правила виконання арифметичних операцій з інтервальними величинами. Якщо значення задані межами інтервалу, то справедливі наступні перетворення:

– додавання: $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$;

– віднімання: $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$;

– множення: $[a, b] \times [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$;

– ділення: $[a, b] / [c, d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$;

причому в разі операції ділення важливим є обмеження $0 \notin [c, d]$,

Приклад виконання роботи

В якості початкових даних скористаємося наступною інтервальною моделюю:

$$[y(\vec{x})] = [364,5; 568,9] + [-68,7; -95,7]x_1 + [4,31; 6,82]x_2 +$$
$$+ [0,916; 1,87]x_1x_2 + [1,19; 2,14]x_1^2 + [-0,095; -0,01]x_2^2;$$

На множину оптимальних розв’язків накладаються обмеження:

$$X = \{8 \le x_1 \le 18;\ 65 \le x_2 \le 140\}. \qquad (7.6)$$

Матриці (7.3) і (7.4):

$$[c] = \begin{pmatrix} [-68,5; -95,7] \\ [4,31; 6,82] \end{pmatrix};$$

$$[W] = \begin{pmatrix} [1,19; 2,14] & [0,458; 0,935] \\ [0,458; 0,935] & [-0,095; -0,01] \end{pmatrix}.$$

Знайдемо зворотну матрицю $[W]^{-1}$ використовуючи метод алгебраїчних доповнень. Спершу знайдемо визначник матриці $[W]$.

$$\det[W]=[1{,}19;2{,}14]\cdot[-0{,}095;-0{,}01]-[0{,}458;0{,}935]\cdot[0{,}458;0{,}935]=$$
$$=[\min(-0{,}1132;-0{,}0119;-0{,}2033;-0{,}0214);\max(-0{,}1132;-0{,}0119;-0{,}2033;-0{,}0214)]-$$
$$-[\min(0{,}2098;0{,}4282;0{,}4582;0{,}8742);\max(0{,}2098;0{,}4282;0{,}4582;0{,}8742)]=$$
$$=[-0{,}2033;-0{,}1190]-[0{,}2097;0{,}8742]=[-0{,}4131;-0{,}8861].$$

Побудуємо матрицю алгебраїчних доповнень: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, де M_{ij} – додатковий мінор, визначник матриці, що виходить з вихідної матриці шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпця. Додаткові мінори:

$$M_{11}=[-0{,}095;-0{,}01];$$
$$M_{21}=M_{12}=[-0{,}935;-0{,}455];$$
$$M_{22}=[1{,}19;2{,}14].$$

Тоді матриця алгебраїчних доповнень:

$$[A]=\begin{pmatrix}[-0{,}095;-0{,}01] & [-0{,}935;-0{,}455]\\ [-0{,}935;-0{,}455] & [1{,}19;2{,}14]\end{pmatrix}.$$

Транспонування цієї матриці не змінить її, оскільки матриця симетрична відносно головної діагоналі ($[A]^{\mathrm{T}}=[A]$). Тоді зворотна матриця:

$$[W]^{-1}=\frac{1}{\det W}[A]^T=\frac{1}{[-0{,}4131;-0{,}8861]}\begin{pmatrix}[-0{,}095;-0{,}01] & [-0{,}935;-0{,}455]\\ [-0{,}935;-0{,}455] & [1{,}19;2{,}14]\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}[0{,}0113;0{,}2300] & [0{,}5169;2{,}2636]\\ [0{,}5169;2{,}2636] & [-5{,}181;-1{,}343]\end{pmatrix}$$

Знайдемо рішення системи лінійних рівнянь (5.5)

$$[x^0]=-0{,}5[W]^{-1}[c]=-0{,}5\cdot\begin{pmatrix}[0{,}0113;0{,}2300] & [0{,}5169;2{,}2636]\\ [0{,}5169;2{,}2636] & [-5{,}181;-1{,}343]\end{pmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}[-68{,}5;-95{,}7]\\ [4{,}31;6{,}82]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}[-7{,}33;9{,}89]\\ [20{,}6;126{,}0]\end{pmatrix}$$

Знайшовши перетин цього розв’язку з множиною допустимих значень факторів (5.6), знайдемо інтервал оптимальних значень факторів за критерієм лінійно-параметризованої функції:

$$[X_0] = X \cap [x^0]. = \{8 \le x_1 \le 18;\ 65 \le x_2 \le 140\} \cap \{-7,33 \le x_1 \le 9,89;\ 20,6 \le x_2 \le 126\} =$$
$$\{8 \le x_1 \le 9,89;\ 65 \le x_2 \le 126\}.$$

Як видно, такий оптимальний розв'язок охоплює незначну частину інтервалу за першим фактором і переважну частину інтервалу за другим фактором.

Контрольні запитання

1. Що таке інтервальна експериментально-статистична модель? Для розв'язку яких задач використовуються інтервальні моделі?
2. Які критерії оптимальності в умовах статистичної невизначеності відомі?
3. В чому особливість розв'язку задачі оптимізації в умовах статистичної невизначеності за критерієм лінійно-параметризованої функції? Що є розв'язком задачі оптимізації за цим критерієм?
4. Які математичні методи використано в роботі для розв'язку задачі?
5. Доведіть справедливість формули (7.5) розв'язку задачі оптимізації в заданих умовах.

Практична робота 8

Вибір оптимального варіанту іонообмінної смоли в умовах нечіткої невизначеності

Мета роботи – виробити уміння і досвід використання методів вибору оптимальних варіантів технологічних рішень в умовах нечіткої невизначеності початкових даних.

Завдання

Досліджувалося чотири зразки іонообмінних смол КУ-2, КУ-2-20, СХ-97, DCHR-76, кожен з яких характеризується чотирма основними властивостями: повною обмінною ємністю, робочим інтервалом pH, селективністю, вартістю. Результатами попарних порівнянь смол наведені за варіантами в додатку Д. За результатами попарних порівнянь необхідно:

1. Обрати оптимальний варіант іонообмінної смоли за умови однакової важливості усіх критеріїв.
2. Провести ранжування критеріїв за важливістю, використовуючи метод попарних порівнянь. Для порівнянь скористатися власною думкою бо думкою когось з Ваших товаришів. Перевірити узгодженість цих домок.
3. Обрати оптимальний варіант іонообмінної смоли з врахуванням вагових коефіцієнтів критеріїв.

Початкові дані для розрахунків подано у додатку Е за варіантами.

Основні теоретичні положення

Одним з найбільш поширених методів пошуку оптимальних рішень в умовах нечіткої невизначеності є експертні парні порівняння. Припустимо, існує множина можливих альтернатив $V = \{v_1, v_2,..., v_n\}$, серед яких потрібно обрати оптимальний, і $\tilde{G} = \{\tilde{G}_1, \tilde{G}_2,..., \tilde{G}_m\}$ – множина кількісних і якісних критеріїв, якими оцінюються альтернативи. Упорядкуємо елементи множини V за критеріями з множини $\tilde{G}$.

Для кожної пари елементів універсальної множини експерт або ОПР оцінює перевагу одного елемента над іншим по відношенню до властивості нечіткої множини. Парні порівняння зручно представляти наступної матрицею:

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array},$$

де – a_{ij} рівень переваги v_i елемента над v_j $(i, j = \overline{1,n})$, що визначається за дев'ятибальною шкалою Сааті:

1 – якщо відсутня перевага елементу v_i над елементом v_j;

3 – якщо є слабка перевага v_i над v_j;

5 – якщо є істотна перевага v_i над v_j;

7 – якщо є явна перевага v_i над v_j;

9 – якщо є абсолютна перевага v_i над v_j;

2, 4, 6, 8 – проміжні порівняльні оцінки.

Матриця попарних порівнянь має наступні властивості:

– діагональна, тобто $a_{ii} = 1$, $i = \overline{1,n}$;
– антисиметрична, тобто елементи, симетричні щодо головної діагоналі, пов'язані залежністю $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $i, j = \overline{1,n}$;
– транзитивна, тобто якщо будь-який елемент a_{i1j1} перебуває у відношенні R з елементом a_{i2j2}, а a_{i2j2} з елементом a_{i3j3}, то a_{i1j1} перебуває в цьому ж відношенні R з елементом a_{i3j3} для усіх $i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3 = \overline{1,n}$.

Наявність цих властивостей дозволяє визначити всі елементи матриці попарних порівнянь, якщо відомі $(n - 1)$ недіагональних елементів.

Оскільки матриця попарних порівнянь квадратна, не має особливого значення який в індексів приймати за номер рядка, а який за номер стовпця. Але протягом всієї задачі цей порядок не може змінюватися.

Основною перевагою використання матриці попарних порівнянь є можливість розрахунку на її основі функцій приналежності. Значення функції приналежності приймаються рівними відповідним координатам власного вектору $L = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ матриці попарних порівнянь: $\mu(v_i) = l_i$, $i = \overline{1,n}$. Власний вектор матриці можна знайти, розв’язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} A \cdot L = \lambda_{\max} \cdot L \\ l_1 + l_2 + \dots + l_n = 1 \end{cases},$$

де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число матриці, тобто максимальний з розв’язків рівняння:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0. \qquad (8.1)$$

Величина $\lambda_{\max}$ є показником узгодженості думок ОПР при прийнятті рішення. При повній узгодженості $\lambda_{\max} = n$ – розміру матриці, при неузгодженості $\lambda_{\max} >> n$.

Обчислення детермінанта для матриць до третього порядку включно не являє труднощів. Для обчислення визначника четвертого порядку можна скористатися формулою:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} M_k ,$$

де M_k – детермінант матриці порядку (n – 1), яка отримана з початкової матриці викреслюванням першого рядка і стовпця з номером k. Так, наприклад, для матриці четвертого порядку:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Варто зазначити, що розрахунок власного вектору матриці для $n \geq 5$ є математично досить складною задачею. Тому у такому випадку, якщо відомо, що думки ОПР узгоджені між собою, розрахунок функцій приналежності значно спрощується і проводиться за формулою:

$$\mu(v_i) = \frac{1}{a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{ni}}, \qquad (8.2)$$

тобто зворотна сума елементів рядка, або, відповідно стовпця, залежно від прийнятої нумерації. За цими даними легко сформувати нечітку множину для кожного з варіантів. Для випадку, якщо важливість усіх критеріїв однакова:

$$q_k = \left\{ \frac{\mu^k(v_1)}{v_1}, \frac{\mu^k(v_2)}{v_2}, \dots, \frac{\mu^k(v_n)}{v_n} \right\}. \qquad (8.3)$$

Якщо важливість критеріїв не однакова і вони мають певні ваги, то:

$$q_k = \left\{ \frac{\left[\mu^k(v_1)\right]^{w_1}}{v_1}, \frac{\left[\mu^k(v_2)\right]^{w_2}}{v_2}, ..., \frac{\left[\mu^k(v_n)\right]^{w_n}}{v_n} \right\}, \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1; w_i > 0, \ i = \overline{1...n} \qquad (8.4)$$

Вибір оптимального варіанту системи в обох вищезазначених випадках виконується згідно принципу визначення оптимального рішення в нечітких умовах Беллмана-Заде. Цей принцип сформулюється наступним чином: якщо на множині альтернативних варіантів $X = \{x\}$ задано нечітку ціль $\tilde{G}$ з функцією приналежності $\mu_G(x)$ і нечітке обмеження $\tilde{C}$ з функцією приналежності $\mu_C(x)$ то нечітким рішенням на множині альтернативних варіантів X буде множина $\tilde{D} = \tilde{G} \cap \tilde{C}$, функція приналежності якої $\mu_D(x) = \min\{\mu_G(x), \mu_C(x)\}$. Оптимальнім при цьому буде розв'язок, що має максимальне значення функції приналежності множині $\tilde{D}$, тобто $\max(\mu_D(x))$.

У відповідності до принципу Баллмана-Заде, альтернативи, функції приналежності яких рівні, не розрізняються. Зокрема, всі рішення, функція приналежності яких дорівнює 1 можна вважати оптимальними.

Приклад виконання роботи

Розглянемо задачу пошуку оптимального варіанту іонообмінної смоли. Для спрощення розуміння прикладу, розглянемо лише три смоли: КУ-2, КУ-2-20 і СХ-97 за трьома критеріями: повною обмінною ємністю, селективністю і вартістю. Приймемо наступні попарні порівняння:

За повною обмінною ємністю: слабка перевага КУ-2-20 над КУ-2; істотна перевага СХ-97 над КУ-2-20; явна перевага СХ-97 над КУ-2;

За повною селективністю: відсутня перевага КУ-2-20 над КУ-2; істотна перевага СХ-97 над КУ-2-20 і над КУ-2;

За вартістю: майже явна перевага КУ-2 над СХ-97; слабка перевага КУ-2 над КУ-2-20 і КУ-2-20 над СХ-97;

Введемо наступні позначення варіантів (v) і критеріїв (q):

- варіанти: v_1 – КУ-2; v_2 – КУ-2-20; v_3 – СХ-97
- критерії: q_1 – повна обмінна ємність; q_2 – селективність; q_3 – вартість:

Запишемо постановку задачі оптимального вибору:

q_1: слабка перевага v_2 над v_1; істотна перевага v_3 над v_2; явна перевага v_3 над v_1;
q_2: відсутня перевага v_2 над v_1; істотна перевага v_3 над v_2 і v_3 над v_1;
q_3: майже явна перевага v_1 над v_3; слабка перевага v_1 над v_2 і v_2 над v_3;

Складемо матриці попарних порівнянь за шкалою Сааті:

$$A(q_1)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\ 1/3 & 1 & 5\\ 1/7 & 1/5 & 1\end{bmatrix};\ A(q_2)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5\\ 1/5 & 1/5 & 1\end{bmatrix};\ A(q_3)=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 1/6\\ 3 & 1 & 1/3\\ 6 & 3 & 1\end{bmatrix};$$

Зверніть увагу на те, що ми розселяли значення за шкалою по рядках. Таким чином, подальший розрахунок також будемо проводити по рядках. Розрахуємо функції приналежності кожного з варіантів за формулою (8.2) і побудуємо нечіткі множини (8.3):

$$\mu^1(v_1)=\frac{1}{1+3+7}=0{,}091;\ \mu^1(v_2)=\frac{1}{1/3+1+5}=0{,}158;\ \mu^1(v_3)=\frac{1}{1/7+1/5+1}=0{,}745.$$

Таким чином:

$$q_1=\left\{\frac{0{,}091}{v_1},\frac{0{,}158}{v_2},\frac{0{,}745}{v_3}\right\}.$$

Аналогічно знаходимо:

$$q_2=\left\{\frac{0{,}143}{v_1},\frac{0{,}143}{v_2},\frac{0{,}714}{v_3}\right\},\ q_3=\left\{\frac{0{,}667}{v_1},\frac{0{,}235}{v_2},\frac{0{,}1}{v_3}\right\}$$

Тоді, у відповідності до принципу оптимальності Беллмана-Заде отримаємо наступну множину рішень за умови, що всі критерії рівнозначні:

$$D=\left\{\frac{0{,}091}{v_1},\frac{0{,}143}{v_2},\frac{0{,}1}{v_3}\right\}.$$

Таким чином, оптимальним слід вважати другий варіант – іонообмінну смолу КУ-2-20.

Тепер розглянемо випадок, коли критерії відбору також проранжовані за важливістю за школою Сааті. Припустимо, що результати ранжування наступні:

w: явна перевага критерію q_1 над q_3; слабка перевага критерію q_2 над q_1; майже абсолютна перевага q_2 над q_3.

Складемо матрицю попарних порівнянь критеріїв:

$$A(w)=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1/7\\ 1/3 & 1 & 8\\ 7 & 1/8 & 1\end{bmatrix}.$$

Для перевірки узгодженості цих думок обчислимо власні значення матриці $A(w)$ за (6.1):

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 1/7 \\ 1/3 & 1-\lambda & 8 \\ 7 & 1/8 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 + 7\cdot 3\cdot 8 + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3} - 3\cdot(1-\lambda) = 0$$

Це рівняння має лише один раціональний розв'язок $\lambda \approx 6{,}67$. Це значення має той же порядок, що і розмірність матриці, тому думки про значущість критеріїв можна вважати узгодженими.

Розрахуємо для цієї матриці функції приналежності і сформуємо нечітку множину:

$$w = \left\{ \frac{0{,}241}{q_1}, \frac{0{,}107}{q_2}, \frac{0{,}123}{q_3} \right\}.$$

Оскільки не виконується обмеження $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, про нормуємо одержані функції приналежності. Для цього розділимо кожну з них на їх суму:

$$w_1 = \frac{0{,}241}{0{,}241 + 0{,}107 + 0{,}123} = 0{,}512;\ \ w_2 = 0{,}227;\ \ w_3 = 0{,}261.$$

Перерахуємо нечіткі множини альтернативних варіантів з врахуванням вагових коефіцієнтів:

$$q_1 = \left\{ \frac{0{,}091^{0{,}512}}{v_1}, \frac{0{,}158^{0{,}512}}{v_2}, \frac{0{,}745^{0{,}512}}{v_3} \right\},\ \ q_2 = \left\{ \frac{0{,}143^{0{,}227}}{v_1}, \frac{0{,}143^{0{,}227}}{v_2}, \frac{0{,}714^{0{,}227}}{v_3} \right\},$$

$$q_3 = \left\{ \frac{0{,}667^{0{,}261}}{v_1}, \frac{0{,}235^{0{,}261}}{v_2}, \frac{0{,}100^{0{,}261}}{v_3} \right\}$$

В результаті одержимо:

$$q_1 = \left\{ \frac{0{,}293}{v_1}, \frac{0{,}389}{v_2}, \frac{0{,}860}{v_3} \right\},\ q_2 = \left\{ \frac{0{,}643}{v_1}, \frac{0{,}643}{v_2}, \frac{0{,}926}{v_3} \right\},\ q_3 = \left\{ \frac{0{,}900}{v_1}, \frac{0{,}682}{v_2}, \frac{0{,}548}{v_3} \right\}$$

У відповідності до принципу Беллмана-Заде знаходимо:

$$D = \left\{ \frac{0{,}293}{v_1}, \frac{0{,}389}{v_2}, \frac{0{,}548}{v_3} \right\}.$$

Таким чином, оптимальним слід вважати третій варіант – іонообмінну смолу СХ-97.

Контрольні запитання

1. Що таке нечітка невизначеність даних? Чим характеризується такий вид невизначеності?

2. У чому полягає відмінність нечіткої і ймовірнісної невизначеностей? Нечіткої і інтервальної невизначеностей?

3. Наведіть формулювання принципу оптимальності Беллмана-Заде. Поясніть, для чого використовується цей принцип?

4. Що таке шкала Сааті? Як вона будується? Для чого застосовують шкалу Сааті у задачах з нечіткою невизначеністю?

5. Що таке власні числа матриці? Як вони знаходяться? Для чого застосовують власні числа матриці у задачах з нечіткою невизначеністю?

6. Як розрахувати функції приналежності без використання власних чисел матриці? В яких випадках слід вдаватися до подібного розрахунку?

Література до роботи: [2]

Список рекомендованої літератури

1. *Вощинин А.П.* Оптимизация в условиях неопределенности [Текст]: Книга+дискета. / А.П. Волощин, Г.Р. Сотиров. – МЭИ(СССР), «Техника» (НРБ), 1989. – 224 с., ил. ISBN 5-7046-0001-8
2. *Дилигенский, Н.В.* Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология. [Текст] / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов – М. : «Машиностроение – 1», 2004. – 397 с. . – Бібліогр.: с. 372-977.
3. *Лю, Б.* Теория и практика неопределенного программирования (Адаптивные и интеллектуальные системы) [Текст] / Баодин Лю; Пер. с англ., – БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 416.: ил. – ISBN 5-94774-241-1
4. *Островский, Г.М.* Технические системы в условиях неопределенности: анализ гибкости и оптимизация: учебное пособие [Текст] / Г.М. Островский, Ю.М. Волин. – Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 319 с.: ил. ISBN 978-5-94774-732-4
5. *Статюха, Г.А.* Автоматизированное проектирование химико–технологических систем. [Текст] / Г.А. Статюха, Киев: Вища школа, 1990, 400 с.
6. *Холоднов, В.А.* Системный анализ и принятие решений. Компьютерное моделирование и оптимизация объектов химической технологии в Mathcad и Excel: учебное пособие [Текст] / В.А. Холоднов, В.П. Решетиловский, М.Ю. Лебедева, Е.С. Боровинская. СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2007. – 425 с.
7. *Холоднов, В.А.* Системный анализ и принятие решений. Компьютерные технологии решения задач многоцелевой оптимизации систем: учебное пособие [Текст] / В.А. Холоднов, М.Ю. Лебедева, А.Е. Пунин, К. Хартманн. СПб.: СПбГТИ (ТУ), 2006. – 153 с.

Додаток А

Варіанти завдань практичної роботи 1

Таблиця А.1 – Значення коефіцієнтів експериментально-статистичних моделей.

	Варіант 1			*Варіант 2*			*Варіант 3*			*Варіант 4*		
Коефіцієнти	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
a_0	46,95	82,13	698,8	61,24	70,81	729,5	47,71	89,51	754,3	56,05	81,67	793,3
a_1	-0,83	-1,02	-55,5	-0,91	-1,04	-53,6	-1,08	-1,02	-53,9	-1,1	-0,9	-60,6
a_2	1,14	-3,38	-92,6	1,25	-3,94	-86,4	1,3	-3,9	-101	1,46	-4,01	-79,3
a_{12}	-0,02	-0,7	16,71	-0,03	-0,93	16,77	-0,02	-0,73	20,77	-0,03	-0,77	15,72
a_{11}	-0,31	0,26	-13,2	-0,27	0,22	-14,6	-0,28	0,22	-16,8	-0,28	0,22	-17,5
a_{22}	-1,87	-1,79	-21,2	-1,79	-1,81	-19,3	-2,29	-1,52	-23,7	-1,77	-1,65	-22,6

	Варіант 5			*Варіант 6*			*Варіант 7*			*Варіант 8*		
Коефіцієнти	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
a_0	58,47	75,33	762,6	48,33	90,88	654,6	46,85	88,48	819,9	55,59	69,58	649,4
a_1	-0,84	-0,78	-51,5	-1,09	-0,92	-47,8	-1,06	-0,96	-65	-0,85	-0,78	-52,1
a_2	1,16	-3,22	-93	1,16	-4,1	-91,9	1,18	-3,43	-104	1,45	-3,6	-89,1
a_{12}	-0,03	-0,81	18,8	-0,02	-0,95	16	-0,03	-0,78	20,42	-0,03	-0,83	20,63
a_{11}	-0,28	0,2	-16,9	-0,28	0,25	-15	-0,24	0,21	-16	-0,27	0,19	-15,7
a_{22}	-2,33	-1,72	-18,9	-1,77	-1,42	-21,7	-2,24	-1,69	-25	-2,08	-1,75	-22,6

	Варіант 9			*Варіант 10*			*Варіант 11*			*Варіант 12*		
Коефіцієнти	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
a_0	52,71	93,3	668,1	53,21	86,53	765	58,91	70,51	779,5	45,86	76,82	789,2
a_1	-0,95	-0,92	-51,4	-0,96	-0,9	-60,5	-1,11	-0,89	-50,7	-1,06	-0,78	-48,5
a_2	1,42	-3,88	-90,5	1,4	-3,87	-92,5	1,28	-4,27	-90,3	1,44	-3,73	-77,1
a_{12}	-0,02	-0,8	18,16	-0,03	-0,73	20,25	-0,03	-0,95	18,89	-0,02	-0,93	16,86
a_{11}	-0,25	0,26	-14,6	-0,27	0,24	-16,2	-0,29	0,23	-15	-0,29	0,25	-17,5
a_{22}	-2,02	-1,51	-22,1	-1,78	-1,66	-24	-1,91	-1,84	-20,9	-2,39	-1,71	-21,5

	Варіант 13			*Варіант 14*			*Варіант 15*		
Коефіцієнти	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
a_0	63,06	93,44	658,4	60,73	88,34	800,5	60,81	88,93	623,8
a_1	-0,86	-0,88	-64	-0,92	-0,9	-61	-1,08	-0,82	-61,8
a_2	1,35	-3,37	-77,8	1,37	-3,95	-84,9	1,17	-3,7	-81,1
a_{12}	-0,03	-0,79	15,58	-0,02	-0,94	18,4	-0,02	-0,89	18,69
a_{11}	-0,29	0,26	-17,8	-0,25	0,26	-15,1	-0,27	0,21	-17,6
a_{22}	-1,89	-1,92	-21,6	-2,3	-1,79	-18,2	-2,05	-1,43	-21

Додаток Б

Варіанти завдань практичної роботи 2

Таблиця Б.1 – Результати експериментів.

№	*Варіант 1*						*Варіант 2*						*Варіант 3*					
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	371	18	-16	77	219	279	226	19	-26	98	207	215	325	26	-29	99	172	334
2	331	28	-22	125	255	217	318	43	-17	107	270	248	332	24	-27	134	293	276
3	176	14	-29	119	140	222	273	19	-24	119	236	270	238	7	-25	100	172	306
4	284	21	-23	84	262	230	384	7	-28	132	214	188	407	16	-20	121	270	300
5	306	18	-16	135	143	268	317	6	-19	98	267	323	404	13	-23	94	267	229
6	241	26	-24	90	282	286	338	12	-23	113	227	208	314	26	-17	88	301	181
7	137	19	-25	123	256	330	399	31	-16	133	168	161	320	10	-19	86	293	153
8	116	15	-22	100	270	240	264	6	-28	97	286	213	247	12	-16	95	143	166

№	*Варіант 4*						*Варіант 5*						*Варіант 6*					
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	199	18	-28	123	242	332	330	19	-19	136	302	328	335	39	-30	131	277	175
2	260	35	-28	84	276	311	371	41	-22	123	225	252	314	11	-18	111	274	189
3	399	40	-20	91	206	329	240	18	-16	79	183	185	325	42	-22	112	150	183
4	406	42	-19	110	187	237	284	39	-28	118	258	207	273	8	-25	75	146	303
5	214	29	-30	122	157	178	97	42	-18	125	252	298	128	29	-20	135	290	296
6	310	25	-27	133	300	212	327	20	-16	96	141	301	150	24	-16	116	203	151
7	259	12	-29	79	253	214	242	18	-29	134	159	337	208	10	-22	98	227	235
8	282	42	-19	78	265	323	330	34	-27	126	182	236	306	22	-23	106	229	323

№	*Варіант 7*						*Варіант 8*						*Варіант 9*					
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	350	15	-29	99	220	178	341	20	-20	134	176	241	329	19	-22	126	261	140
2	160	11	-16	86	145	180	140	36	-17	120	169	319	411	7	-18	83	257	283
3	334	8	-19	124	157	190	388	38	-21	131	268	234	155	27	-26	116	153	158
4	149	39	-24	126	161	286	94	42	-16	133	160	253	224	33	-20	80	199	291
5	156	14	-28	134	293	170	357	17	-22	103	274	183	389	10	-27	111	205	283
6	387	42	-27	134	212	281	403	39	-26	127	149	231	208	37	-30	79	310	313
7	277	35	-26	75	207	289	331	16	-28	91	268	279	319	10	-22	101	246	278
8	238	19	-17	127	144	300	379	8	-25	132	295	144	145	28	-23	92	224	249

Продовження таблиці Б.2

№	*Варіант 10*						*Варіант 11*						*Варіант 12*					
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	327	29	-27	124	192	169	175	19	-25	85	243	217	214	37	-24	111	169	167
2	263	41	-24	127	223	145	113	36	-29	106	231	232	91	21	-17	110	289	216
3	321	16	-25	110	283	271	196	40	-22	111	175	149	232	28	-17	103	311	161
4	95	33	-16	104	265	315	276	13	-16	127	162	175	400	10	-19	79	286	269
5	100	35	-20	80	223	219	252	25	-18	87	295	140	133	25	-23	132	192	248
6	147	12	-22	122	311	238	377	9	-24	90	271	311	155	17	-26	110	291	202
7	297	28	-21	98	190	300	191	7	-17	82	277	178	257	35	-26	129	262	310
8	328	43	-16	102	232	170	177	29	-29	91	161	219	197	6	-29	104	254	178

№	*Варіант 13*						*Варіант 14*						*Варіант 15*					
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
1	158	15	-20	123	314	173	286	32	-30	131	284	336	162	38	-24	92	262	267
2	175	38	-20	105	201	271	207	36	-25	93	291	283	299	9	-26	105	228	327
3	176	30	-25	122	204	315	363	14	-24	99	255	164	221	23	-30	117	201	295
4	175	10	-21	122	263	238	93	18	-25	104	271	181	339	34	-23	121	158	270
5	225	36	-20	134	251	334	158	10	-30	108	153	305	434	39	-27	113	140	181
6	412	7	-20	132	189	273	430	29	-17	108	285	165	280	11	-22	129	167	161
7	348	31	-23	112	212	255	212	37	-25	96	155	155	211	8	-18	114	234	159
8	335	8	-18	78	289	280	221	17	-26	95	178	294	109	40	-19	108	171	303

Таблиця Б.2 – Рівні бажаностей.

Показник	*Значення на граничних рівнях:*			
	дуже погано – погано	*погано – задовільно*	*задовільно – добре*	*добре – дуже добре*
y_1	95	120	200	300
y_2	40	20	15	10
y_3	–15	–18	–20	–25
y_4	130	105	90	80
y_5	150	220	250	340
y_6	150	200	280	330

Додаток В

Варіанти завдань практичних робіт 3 і 4

Таблиця В.1 – Результати ранжування властивостей сорбентів

Варіант 1				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	5	5	1	2
2	4	5	1	3
1	4	4	2	4
2	4	4	1	4

Варіант 2				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	4	4	2	4
2	4	4	1	4
2	5	4	1	3
2	4	5	1	3

Варіант 3				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
1	4	4	2	4
2	4	3	1	5
2	4	4	1	4

Варіант 4				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	5	4	1	3
1	5	4	2	3
2	5	3	1	4
1	4	4	2	4

Варіант 5				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
2	5	4	1	3
1	5	3	2	4
1	5	4	2	3

Варіант 6				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	5	1	3
2	4	5	1	3
2	4	4	1	4
1	4	3	2	5

Варіант 7				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	4	4	2	4
1	4	4	2	4
2	4	4	1	4
1	4	3	2	5

Варіант 8				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	5	3	1	4
2	4	4	1	4
2	4	4	1	4
1	5	4	2	3

Варіант 9				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	4	4	2	4
2	5	4	1	3
2	4	5	1	3
2	4	4	1	4

Варіант 10				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
2	5	4	1	3
1	5	4	2	3
2	5	3	1	4

Варіант 11				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
1	4	4	2	4
2	4	4	1	4
1	4	3	2	5

Варіант 12				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
2	4	3	1	5
2	5	5	1	2
2	4	4	1	4

Варіант 13				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
2	4	4	1	4
1	4	3	2	5
2	5	4	1	3

Варіант 14				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
2	4	4	1	4
1	5	3	2	4
2	4	5	1	3

Варіант 15				
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
2	4	4	1	4
2	4	4	1	4
2	4	4	1	4
1	5	4	2	3

Таблиця В.2 – Результати ранжування сорбентів за їх властивостями

Варіант 1

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	4	2	4	1	4	2	1	5	4	4	2	4	1	4	5	3	1	4	2	4	3	2	5	1
3	4	2	5	1	3	2	1	6	4	3	1	5	2	4	4	5	2	3	1	4	4	2	4	1
4	5	2	3	1	4	2	1	5	4	4	2	5	1	3	4	3	2	5	1	4	5	1	3	2
3	4	2	5	1	3	1	2	7	4	4	2	4	1	4	5	2	1	5	2	4	3	1	5	2

Варіант 2

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
5	4	2	3	1	4	2	1	4	4	3	2	4	1	5	5	3	1	4	2	4	4	2	4	1
4	4	1	4	2	3	1	2	5	4	3	2	5	1	4	4	5	1	3	2	4	3	1	5	2
4	4	2	4	1	4	2	1	3	5	2	1	5	2	5	4	5	2	3	1	4	4	2	4	1
4	4	2	4	1	4	1	2	4	4	4	2	4	1	4	5	3	1	4	2	5	3	1	4	2

Варіант 3

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
5	4	1	3	2	5	1	2	3	4	3	2	5	1	4	4	4	1	4	2	4	4	1	4	2
4	4	2	4	1	5	1	2	3	4	3	2	5	1	4	4	3	1	5	2	4	3	1	5	2
5	4	2	3	1	3	1	2	5	4	4	2	4	1	4	4	4	1	4	2	4	4	2	4	1
4	4	2	4	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	4	4	1	4	2	4	3	2	5	1

Варіант 4

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
5	4	2	3	1	5	2	1	3	4	5	2	4	1	3	4	3	2	5	1	5	4	2	3	1
4	4	2	4	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	4	4	1	4	2	5	4	2	3	1
4	5	1	3	2	3	1	2	5	4	3	1	5	2	4	5	3	1	4	2	4	3	1	5	2
3	5	2	4	1	5	1	2	3	4	5	1	4	2	3	5	2	1	5	2	5	2	1	5	2

Варіант 5

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
5	4	2	3	1	4	1	2	3	5	3	2	5	1	4	4	4	2	4	1	4	4	1	4	2
4	4	2	4	1	5	1	2	2	5	4	2	5	1	3	5	3	1	4	2	5	3	1	4	2
4	4	1	4	2	5	2	1	3	4	4	2	4	1	4	4	3	1	5	2	4	4	1	4	2
5	5	2	2	1	4	2	1	4	4	4	2	4	1	4	5	2	1	5	2	4	4	2	4	1

Варіант 6

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	4	2	4	1	4	1	2	3	5	3	2	5	1	4	4	5	2	3	1	4	4	1	4	2
5	5	2	2	1	3	1	2	5	4	4	2	4	1	4	4	3	1	5	2	5	2	1	5	2
4	4	2	4	1	4	2	1	3	5	3	1	4	2	5	4	4	2	4	1	4	4	1	4	2
4	4	2	4	1	4	1	2	3	5	4	1	5	2	3	4	5	1	3	2	5	3	1	4	2

Варіант 7

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	5	2	3	1	3	2	1	5	4	3	2	4	1	5	5	2	2	5	1	4	4	1	4	2
3	5	2	4	1	5	1	2	2	5	4	1	4	2	4	5	4	1	3	2	5	3	1	4	2
4	5	2	3	1	4	1	2	3	5	4	2	5	1	3	5	3	1	4	2	4	4	2	4	1
5	4	2	3	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	5	4	1	3	2	4	4	1	4	2

Варіант 8

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	5	2	3	1	4	1	2	3	5	2	1	5	2	5	5	3	2	4	1	4	4	2	4	1
3	4	2	5	1	4	1	2	4	4	5	2	4	1	3	5	3	1	4	2	4	4	1	4	2
4	5	2	3	1	4	2	1	4	4	4	2	4	1	4	4	3	1	5	2	4	4	1	4	2
4	4	2	4	1	4	1	2	3	5	5	2	4	1	3	5	3	1	4	2	5	4	2	3	1

Варіант 9

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
3	4	2	5	1	3	2	1	5	4	2	2	5	1	5	4	4	1	4	2	5	4	2	3	1
4	4	2	4	1	4	2	1	4	4	4	2	5	1	3	4	4	1	4	2	4	4	1	4	2
5	4	2	3	1	5	2	1	2	5	4	2	4	1	4	5	3	1	4	2	5	4	2	3	1
4	4	2	4	1	4	1	2	3	5	3	2	4	1	5	4	4	2	4	1	4	5	1	3	2

Варіант 10

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	5	2	3	1	4	1	2	3	5	4	1	4	2	4	5	3	2	4	1	4	3	2	5	1
4	4	2	4	1	4	1	2	4	4	5	2	4	1	3	4	4	1	4	2	4	4	1	4	2
4	5	2	3	1	4	1	2	4	4	3	2	5	1	4	5	2	2	5	1	4	3	2	5	1
4	5	1	3	2	4	1	2	4	4	4	2	4	1	4	5	3	1	4	2	4	4	1	4	2

Варіант 11

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	4	2	4	1	4	2	1	4	4	3	2	5	1	4	5	2	2	5	1	4	4	1	4	2
4	5	2	3	1	5	2	1	3	4	3	1	5	2	4	5	3	1	4	2	5	3	2	4	1
4	4	2	4	1	4	2	1	3	5	3	2	5	1	4	5	3	1	4	2	4	5	2	3	1
5	4	2	3	1	4	2	1	3	5	5	2	4	1	3	5	2	1	5	2	5	4	2	3	1

Варіант 12

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
5	4	2	3	1	4	2	1	4	4	3	1	5	2	4	4	4	1	4	2	5	3	2	4	1
5	4	2	3	1	4	1	2	3	5	4	1	4	2	4	4	4	1	4	2	5	3	1	4	2
4	5	2	3	1	3	1	2	5	4	5	1	4	2	3	4	4	1	4	2	5	2	1	5	2
3	4	2	5	1	3	2	1	5	4	3	2	4	1	5	4	4	2	4	1	4	4	2	4	1

Продовження таблиці В.2

Варіант 13

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	5	2	3	1	3	1	2	4	5	3	1	4	2	5	4	4	1	4	2	5	4	1	3	2
4	5	1	3	2	5	2	1	3	4	4	2	5	1	3	4	4	1	4	2	5	3	1	4	2
4	5	2	3	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	4	3	1	5	2	4	4	1	4	2
4	4	1	4	2	4	2	1	4	4	3	2	5	1	4	4	4	1	4	2	4	4	2	4	1

Варіант 14

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	4	1	4	2	4	2	1	4	4	4	2	5	1	3	4	5	1	3	2	4	4	1	4	2
5	4	2	3	1	3	1	2	4	5	4	2	5	1	3	4	4	1	4	2	4	3	2	5	1
4	4	2	4	1	4	1	2	4	4	3	1	5	2	4	5	4	2	3	1	5	4	2	3	1
4	5	2	3	1	4	1	2	3	5	4	1	4	2	4	4	3	2	5	1	4	4	1	4	2

Варіант 15

X_1					X_2					X_3					X_4					X_5				
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
4	4	1	4	2	5	2	1	2	5	3	2	5	1	4	4	4	1	4	2	4	4	2	4	1
3	5	1	4	2	4	2	1	4	4	4	2	4	1	4	4	3	1	5	2	5	2	2	5	1
3	4	1	5	2	3	2	1	5	4	4	2	4	1	4	4	5	1	3	2	4	4	1	4	2
3	5	2	4	1	4	2	1	4	4	4	1	4	2	4	4	4	1	4	2	4	4	1	4	2

Додаток Г

Варіанти завдань практичної роботи 5

Таблиця Г.1 – Числові значення

Варіант	β	c_{max}	*Елемент 1*			*Елемент 2*			*Елемент 3*			*Елемент 4*		
			m	σ	C	m	σ	C	m	σ	C	m	σ	C
1	0,91	382	154	23	33	264	27	41	317	27	46	518	25	73
2	0,94	364	157	26	35	258	23	42	285	23	48	510	24	77
3	0,92	355	159	25	33	246	24	42	303	24	55	500	22	87
4	0,96	365	141	28	34	245	24	45	314	24	51	517	22	74
5	0,91	334	151	26	34	235	22	49	293	22	47	480	24	80
6	0,98	359	156	25	32	264	25	41	299	28	48	479	27	78
7	0,97	383	152	26	34	239	27	49	290	25	50	519	25	86
8	0,90	359	156	27	35	255	22	43	285	26	52	495	22	75
9	0,96	343	147	25	37	263	22	46	296	27	53	494	24	86
10	0,94	330	142	28	37	238	23	41	296	27	53	470	23	79
11	0,95	329	142	25	32	249	24	47	306	28	53	527	25	78
12	0,97	381	143	27	36	239	24	46	300	23	48	499	25	82
13	0,95	355	141	26	33	263	27	43	315	24	49	519	26	80
14	0,95	378	156	26	38	245	28	41	298	24	45	488	25	85
15	0,93	342	152	25	36	235	28	48	311	23	50	502	27	80

Додаток Д

Варіанти завдань практичної роботи 6

Таблиця Д.1 – Інтервали значень функції

Варіант	*1*	
x	y^-	y^+
8	-63,2	-55,5
10	-82,3	-76,8
12	-99,2	-91,5

Варіант	*2*	
x	y^-	y^+
4	61,6	66,5
10	144,9	148,4
16	229,6	234,5

Варіант	*3*	
x	y^-	y^+
2	21	25,2
8	112,8	115,8
14	201	205,2

Варіант	*4*	
x	y^-	y^+
10	-51,2	-43,5
15	-82,3	-76,8
20	-111,2	-103,5

Варіант	*5*	
x	y^-	y^+
10	128	135
13	163	168
16	200	207

Варіант	*6*	
x	y^-	y^+
9	115,2	121,5
11	138,3	142,8
13	163,2	169,5

Варіант	*7*	
x	y^-	y^+
7	-118,5	-112,2
13	-205,8	-201,3
19	-298,5	-292,2

Варіант	*8*	
x	y^-	y^+
6	-47,6	-42
15	-129,4	-125,4
24	-209,6	-204

Варіант	*9*	
x	y^-	y^+
7	-65	-60,8
11	-95,2	-92,2
15	-129	-124,8

Варіант	*10*	
x	y^-	y^+
9	40,5	46,8
14	73,2	77,7
19	100,5	106,8

Варіант	*11*	
x	y^-	y^+
5	-67	-61,4
9	-108,6	-104,6
13	-155	-149,4

Варіант	*12*	
x	y^-	y^+
7	-55,5	-49,2
10	-70,8	-66,3
13	-91,5	-85,2

Варіант	*13*	
x	y^-	y^+
7	-83	-76
16	-201	-196
25	-317	-310

Варіант	*14*	
x	y^-	y^+
3	22,8	27
9	58,2	61,2
15	94,8	99

Варіант	*15*	
x	y^-	y^+
6	-99	-92
11	-144	-139
16	-195	-188

Додаток Е

Варіанти завдань практичної роботи 8

Таблиця Е.1 – Результати попарних порівнянь за обмінною ємністю.

Вар.	*КУ-2-20 над КУ-2*	*СХ-97 над КУ-2-20*	*СХ-97 над КУ-2*	*DCHR-76 над СХ-97*
1	майже відсутня	майже явна	майже явна	майже відсутня
2	слабка	істотна	майже явна	слабка
3	слабка	майже явна	майже абсолютна	відсутня
4	майже відсутня	майже явна	явна	слабка
5	слабка	майже явна	майже явна	відсутня
6	майже істотна	істотна	майже абсолютна	слабка
7	майже істотна	майже явна	явна	майже відсутня
8	слабка	майже явна	майже абсолютна	слабка
9	слабка	майже істотна	майже явна	майже відсутня
10	майже істотна	майже явна	явна	слабка
11	майже відсутня	істотна	майже явна	відсутня
12	слабка	майже явна	майже абсолютна	слабка
13	слабка	істотна	явна	майже відсутня
14	майже відсутня	майже явна	явна	відсутня
15	слабка	істотна	майже явна	відсутня

Таблиця Е.2 – Результати попарних порівнянь за селективністю.

Вар.	*КУ-2-20 над КУ-2*	*СХ-97 над КУ-2 і над КУ-2-20*	*DCHR-76 над КУ-2-20 і над КУ-2*	*DCHR-76 над СХ-97*
1	майже відсутня	майже істотна	явна	майже істотна
2	майже відсутня	істотна	майже абсолютна	майже відсутня
3	майже відсутня	майже явна	майже абсолютна	майже істотна
4	майже відсутня	майже явна	явна	майже відсутня
5	слабка	істотна	явна	слабка
6	слабка	істотна	абсолютна	слабка
7	слабка	істотна	майже абсолютна	майже відсутня
8	відсутня	майже істотна	майже абсолютна	слабка
9	відсутня	майже істотна	явна	слабка
10	відсутня	істотна	майже абсолютна	майже істотна
11	майже відсутня	істотна	явна	слабка
12	слабка	майже явна	майже абсолютна	майже відсутня
13	слабка	істотна	явна	майже істотна
14	слабка	істотна	абсолютна	слабка
15	майже відсутня	істотна	абсолютна	слабка

Таблиця Е.3 – Результати попарних порівнянь за вартістю.

Вар.	*КУ-2 над СХ-97*	*КУ-2 над КУ-2-20 і КУ-2-20 над СХ-97*	*КУ-2 над DCHR-76*	*КУ-2-20 над DCHR-76*
1	явна	майже істотна	явна	майже істотна
2	істотна	майже істотна	майже явна	істотна
3	майже явна	слабка	майже абсолютна	істотна
4	явна	майже істотна	майже явна	істотна
5	майже явна	слабка	майже абсолютна	майже явна
6	явна	майже істотна	майже абсолютна	істотна
7	майже явна	слабка	явна	майже істотна
8	майже явна	майже відсутня	майже явна	майже явна
9	явна	слабка	майже явна	істотна
10	явна	майже істотна	майже абсолютна	істотна
11	майже явна	слабка	явна	майже явна
12	істотна	майже відсутня	явна	майже явна
13	явна	слабка	явна	майже явна
14	майже явна	майже істотна	майже явна	майже явна
15	майже явна	майже відсутня	майже абсолютна	істотна

Таблиця Е.4 – Результати попарних порівнянь за робочим інтервалом pH.

Вар.	*КУ-2-20 над КУ-2*	*СХ-97 над DCHR-76*	*СХ-97 над КУ-2 і над КУ-2-20*	*DCHR-76 над КУ-2-20 і над КУ-2*
1	майже відсутня	майже істотна	майже істотна	майже явна
2	слабка	слабка	істотна	істотна
3	майже відсутня	майже відсутня	майже явна	майже явна
4	слабка	слабка	майже істотна	майже явна
5	майже відсутня	майже істотна	майже явна	явна
6	відсутня	слабка	майже явна	явна
7	відсутня	майже відсутня	майже явна	майже явна
8	слабка	слабка	істотна	істотна
9	майже відсутня	майже відсутня	майже явна	явна
10	майже відсутня	майже істотна	істотна	майже явна
11	майже відсутня	слабка	майже явна	явна
12	слабка	слабка	істотна	істотна
13	слабка	майже відсутня	майже явна	майже явна
14	відсутня	майже істотна	майже істотна	явна
15	відсутня	слабка	істотна	явна