НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Хіміко-технологічний факультет
Кафедра кібернетики хіміко-технологічних процесів

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

___________ ______________
(підпис) (ініціали, прізвище)

“___” _____________20__ р.

Дипломна робота

освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст»

зі спеціальності **151 Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології**
Спеціалізація **Комп’ютерно-інтегровані технології сталих хімічних виробничих комплексів**

на тему: «Моделювання та оптимізація процесу цементації ртуті в умовах статистичної невизначеності»
Виконала студентка _6__ курсу, групи __ХА-61с____
(шифр групи)

_______________Потапенко Тетяна Євгеніївна________________ __________
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Керівник: доцент кафедри КХТП, к.т.н. , доцент_______________

__________Складанний Денис Миколайович ________________ __________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент ____ __________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____________
(підпис)

Київ – 2017 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»

Інститут (факультет) Хіміко-технологічний факультет
(повна назва)

Кафедра Кафедра кібернетики хіміко-технологічних процесів
(повна назва)

Освітньо-кваліфікаційний рівень – «спеціаліст»

Спеціальність 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
Т. В. Бойко
__________ ______________
(підпис) (ініціали, прізвище)
«___»____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту
Потапенко Тетяні Євгеніївні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Моделювання та оптимізація процесу цементації ртуті в умовах статистичної невизначеності,

керівник роботи : доцент кафедри КХТП, к.т.н., доцент, Складанний Денис Миколайович ,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «___»_________ 20__ р. №_____

2. Термін подання студентом роботи 13 грудня 2017 року

3. Вихідні дані до роботи: план експерименту та експериментальні результати дослідження процесу цементації ртуті алюмінієм з водних розчинів

4. Зміст роботи 1 Моделювання процесу цементації ртуті з водних розчинів; 2 Огляд методів дослідження цементації труті в умовах невизначеності; 3 Модифікація методів та розроблення програмного забезпечення для вирішення задачі; 4 Розв'язання задачі оптимізації процесу

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо) ____

____

____

____

6. Дата видачі завдання ____________________________

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Моделювання процесу цементації ртуті з водних розчинів	29.10.2017 – 10.11 2017	
2	Огляд методів дослідження цементації труті в умовах невизначеності	11.11.2017-18.11.2017	
3	Модифікація методів та розроблення програмного забезпечення для вирішення задачі	19.11.2017-28.11.2017	
4	Розв’язання задачі оптимізації процесу	29.11.2017-04.12.2017	
5	Оформлення пояснювальної записки д дипломної роботи	05.12.2017 – 13.12.2017	
6	Підготовка доповіді та ілюстративного матеріалу до захисту роботи	05.12.2017 – 13.12.2017	

Студент ____________ _Потапенко Т. Є._____
(підпис) (ініціали, прізвище)

Керівник роботи ____________ _Складанний Д. М.__
(підпис) (ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Звіт до дипломної роботи 83 с., 5 табл., 23 рис., 2 дод., 12 джерел

ЦЕМЕНТАЦІЯ, РТУТЬ, СТАТИСТИЧНА НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ, ІНТЕРВАЛЬНА ОЦІНКА КОЕФІЦІЄНТІВ, ОПТИМІЗАЦІЯ

Об’єктом дослідження є процес цементації металів з їх розчинів, що протікає в реакторі безперервної дії.

Мета роботи є побудова експериментально-статистичної моделі процесу цементації ртуті та вирішення на її основі задачі оптимізації з врахуванням умов статистичної невизначеності одержаних експериментальних даних.

Методи дослідження:

- експериментально-статистичне моделювання;
- методи інтервального аналізу даних;
- методи вирішення задач в умовах статистичної невизначеності;
- об’єктно орієнтовне програмування.

Встановлено що моделювання та оптимізацію процесу слід проводити в умовах статистичної невизначеності.

Розглянуто методи вирішення задач в умовах статистичної невизначеності та вдосконалено їх для оптимізації досліджуваного процесу.

Розроблено програмне забезпечення для вирішення задачі експериментально-статистичного моделювання та оптимізації в умовах статистичної невизначеності.

Знайдено оптимальні умови процесу цементації за різних гіпотез про реальний вид регресійної залежності ступеню очищення від факторів процесу.

РЕФЕРАТ

Отчет дипломной работы 83 с., 5 табл., 23 рис., 2 доп., 12 источников

ЦЕМЕНТАЦИЯ, РТУТЬ, СТАТИСТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ, ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ОПТИМИЗАЦИЯ

Объектом исследования является процесс цементации металлов с их растворов, протекающих в реакторе непрерывного действия.

Цель работы является построение экспериментально-статистической модели процесса цементации ртути и решения на ее основе задачи оптимизации с учетом условий статистической неопределенности полученных экспериментальных данных.

Методы исследования:

- экспериментально-статистическое моделирование;
- методы интервального анализа данных;
- методы решения задач в условиях статистической неопределенности;
- объектно ориентированное программирование

Установлено, что моделирование и оптимизацию процесса следует проводить в условиях статистической неопределенности.

Рассмотрены методы решения задач в условиях статистической неопределенности и усовершенствование их для оптимизации исследуемого процесса.

Разработано программное обеспечение для решения задачи экспериментально-статистического моделирования и оптимизации в условиях статистической неопределенности.

Найдены оптимальные условия процесса цементации при различных гипотезах о реальном вид регрессионной зависимости степени очистки от факторов процесса.

ABSTRACT

Report to the thesis 83 p., 5 tables, 23 pics, 2 pp., 12 sources

CARBURIZATION, MERCURY, STATISTICAL UNCERTAINTY, INTERVAL COEFFICIENTS ESTIMATION, OPTIMIZATION

The object of research is the process of carburizing metals from their solutions flowing in the reactor continuously.

The purpose of the work is to construct an experimentally-statistical model of the process of carburization of mercury and to solve on its basis optimization problems, taking into account the conditions of statistical uncertainty of the experimental data obtained.

Research methods:

- experimental-statistical modeling;
- methods of interval analysis of data;
- methods of solving problems in conditions of statistical uncertainty;
- object oriented programming.

It is established that modeling and optimization of the process should be carried out in conditions of statistical uncertainty.

The methods of solving problems in terms of improved statistical uncertainty and to optimize the process under study has been reviewed.

The software for solving the problem of experimental-statistical modeling and optimization in the conditions of statistical uncertainty has been developed.

The optimum conditions of the process of cementation under various hypotheses about the real kind of regressive dependence of the degree of purification on the process factors are found.

ЗМІСТ

ВСТУП

Цементація - процес контактного електрохімічного витіснення одних металів іншими з їхніх сполук, що знаходяться в розчинах або в розплавах.

Процес цементації широко застосовують в промисловості завдяки його високій ефективності і доступності. Він дозволяє створювати на робочій поверхні деталі шар, що володіє високою твердістю після загартування, зносостійкістю, ерозійною стійкістю і контактною витривалістю.

Невизначеність в задачах виникає там, де дослідник при вирішенні задачі змушений користуватися неточною або неповною інформацією. Існують два основні фактори невизначеності.

В першому випадку джерелом невизначеності є неточність початкових даних про умови функціонування або проектування складних систем. Таку невизначеність називають інформаційною

В іншому випадку джерелом невизначеності є неточність математичних моделей що використовуються при вирішення задачі моделювання та оптимізації

Таким чином важливо вирішувати задачі в умовах невизначеності.

Об'єктом дослідження є процес цементації металів з їх розчинів, що протікає в реакторі безперервної дії.

Предметом дослідження є моделювання процесу цементації в умовах часткової невизначеності.

Методи дослідження:

– експериментально-статистичне моделювання;
– методи інтервального аналізу даних;
– методи вирішення задач в умовах статистичної невизначеності;
– об'єктно орієнтовне програмування.

Таким чином, метою даної роботи є побудова експериментально-статистичної моделі процесу цементації ртуті та вирішення на її основі задачі оптимізації з врахуванням умов статистичної невизначеності одержаних експериментальних даних.

Дана робота виконувалась в межах ініціативної науково-дослідної роботи кафедри «Оптимізація технологічних об’єктів та систем управління з урахуванням надійності, невизначеності і ризиків» (номер державної реєстрації 0117U007339). Витяг з протоколу представлений у Додатку А.

За результатами роботи опублікована доповідь на конференції [11]. Та подано до публікації робота «Моделювання і оптимізація процесу цементації ртуті в умовах статистичної невизначеності» з співавторством з керівником дипломної роботи та доц. Бойко Т.В..

1 Моделювання процесу цементації ртуті з водних розчинів

1.1 Огляд процесу цементації металів, як об'єктів моделювання

1.1.1 Суть процесу

Важко сказати, хто і коли вперше відкрив явище цементації. Швидше за все це сталося на прикладі витіснення міді з її розчинів залізом - явища ефективного, але не такого простого, яким воно здається спочатку. Стародавні алхіміки процес цементації називали трансмутація. Початок досліджень по цементації благородних металів цинком відносять до першої половини XIX в. Так, в серпні 1843 року в журналі «Вітчизняні записки» була вміщена стаття А.Ф. Грекова з повідомленням про розроблений ним спосіб. .. золочення, сріблення і платинування електрохімічним шляхом без гальванічного снаряда або батарей. Зокрема, в статті зазначалося, що цинкова пластина, опущена в ціаністий розчин золота, покривалася шаром металевого золота. Пізніше, в 1865 р, Н.Н. Бекетов, який запропонував вперше ряд напруг металів, заклав наукові основи електрохімічної природи процесів цементації [1].

В даний час найбільш поширеною є корозійна модель процесу цементації. Відповідно до цієї теорії, процес цементації розглядають як аналог короткозамкнутого корозійного гальванічного елемента, при роботі якого анодні ділянки металу розчиняються, а на катодних ділянках відбувається розряд іонів витягується металу. На рис. 1.1 показані два варіанти структури цементаційних елементів для різних металів-цементаторов, що відрізняються один від одного активністю. Так, наприклад, в процесі цементації міді залізом відбувається розчинення заліза на анодних ділянках і осадження міді на катодних ділянках. При цьому маса і розмір часток металу-цементатора зменшуються, а товщина шару міді збільшується [1].

Рисунок 1.1 – Схема цементаціооних елементів Fe – Cu (а) та Zn – Cu (б):

1 – еквівалентна пора в цементному осаді

2 –розчин всередині порожнини

r_0 –початковий радіус частинки металу-цементатора

1.1.2 Апаратурне оформлення процесу

Головними вимогами, що пред'являються до апаратури для цементації (цементатора), є: висока продуктивність одиничного апарату по розчину за умови забезпечення необхідного ступеня осадження з нього металу, низькі трудові та енергетичні витрати, мінімальні витрати з переділу (цеху). Рівняння [1]

— ‾)]

У загальному вигляді висловлює зв'язок змісту металу, який отримують у вихідному з реактора розчині з величиною площі поверхні металу-цементатора, продуктивністю реактора за розчином і інтенсивністю перемішування частинок в розчині. Воно може бути використано як критерій при виборі апаратури.

Збільшення ступеня турбулізації в реакторі може бути здійснено різними методами. Як буде показано нижче, таким засобом, наприклад, в жолобах може служити фонтанування розчину через шар частинок металу-цементатора, в механічних агітаторів - швидкість обертання мішалки, а в реакторах з затопленої струменем - швидкість витікання струменя.

Залежно від організації потоків в реакторах розрізняють процеси періодичні і безперервні. Продуктивність одиничного періодичного реактора вище продуктивності безперервного реактора того ж обсягу, внаслідок чого в безперервних процесах для досягнення необхідного ступеня перетворення речовини доводиться встановлювати каскад реакторів. Разом з тим реактори періодичної дії вимагають значних витрат праці і часу на всякого роду допоміжні операції (завантаження, розвантаження, очищення та ін.). При високій продуктивності за розчином економічно вигіднішими на підприємстві стають реактори безперервної дії [1].

Звертає на себе увагу велика різноманітність конструкцій апаратів для цементації, що використовуються в промисловості. Певною мірою ця обставина свідчить про відсутність єдиного наукового підходу до їх конструювання.

Жолоби. Жолоби є найбільш простими з боку конструкції, й найбільш поширеним обладнанням, яке використовується для цементації міді залізом з рудних розчинів. Довжина одиничного жолоба 5 — 30 м, глибина 1 - 2 м, ширина 0,5 - 3,0 м. Нахил жолобів ~ 2%. За формою жолоба можуть бути прямолінійними або зигзагоподібно. Витяг міді в жолобах становить 90,0 — 97,5 % [1].

Колони. Апарати колонного типу це вертикальні труби, колони, шахти, в яких знаходиться метал-цементатора, через шар якого пропускають розчин. В одному з патентів 1 цементацію вісмуту пропонують проводити у вертикальній трубі висотою 2,0 м і діаметром 0,1 м, в яку розміщують 28 кг сталевої стружки. Збоку в трубу подають повітря, при барботажі якого осад вісмуту здирається з поверхні заліза. В іншому з патентів17 18 також пропонують колонний цементатор (два або більше послідовно з'єднаних), в якому цементацію металів здійснюють цинковим пилом, змішаним з клеєм і нанесеним на поверхню кераміки або кварцового піску. Вертикальна ялиця з висотою стовпа залізного скрапу 19,8 м забезпечує час контакту 40 - 50 хв і осадження міді від 2,4 до 0,01 кг. Запропоновано пристрій, що складається з вертикальної труби, на якій змонтовані реакційні камери, заповнені губчастим залізом. Пульпа подається в центральну трубу і проходить всі камери. Запропонована також вертикальна вежа із залізним скрапом, в яку розчин надходить знизу. Цементна мідь з вежі вивантажується також знизу при відкриванні люка. У вежу завантажують відходи заліза, алюмінію і магнію, які попередньо активують розчином соляної кислоти або трихлоретилу для видалення масел з поверхні металу-цементатора. Розчин в вежу подають знизу, а цементну мідь вивантажують епізодично [1].

Барабани. Цементатори барабанного типу є досить поширеними в практиці осадження міді з рудних розчинів. Розміри барабанів: діаметр 1 - 3 м, довжина 5 - 9 м, число оборотів в хвилину 2 - 8. З патентів запропонованих за останні 5 років (1974 - 1978 гг), Слід зазначити американський патент і патент ФРН. У першому з них цементацію пропонують проводити в барабані чавунними гранулами діаметром 1,65 м при досить великій швидкості обертання барабана з тим, щоб осад міді з поверхні гранул в процесі цементації здирати. У другому патенті цементацію пропонують вести в барабані шматками заліза. Барабан струшують з допомогою віброприводу. При цьому осад міді відділяється від заліза і виноситься розчином з барабана.

Пульсаційні апарати. Пульсаційні цементатори представляють собою апарати колонного типу, в яких розчин пульсує. Розроблено конструкцію і принцип роботи пульсаційного цементатора, в якому здійснюється очистка цинкових розчинів від міді, кадмію і талію цинковими гранулами. Зроблено висновок, що максимальна швидкість руху розчину щодо твердих частинок може бути досягнута лише в апаратах з вертикальними пульсаціями, змінними у напрямку і швидкості. Показано, що найбільша швидкість цементації спостерігається в пульсаційної колоні. Схематично пульсаційний цементатора зображений на рис. 1.2.

Рисунок 1.2. Схема пульсаційної колони для цементація:
1 - збірник дрібного матеріалу; 2 -решітка; 3 - ліжко; 4 - корпус; 5 - вказівник рівня кордону; 6 -клапан; 7 – діафрагма

Шарові млини-цементатори. Шарові млини це ефективним апаратом для цементації. Їх головна перевага полягає в постійному оновленні поверхні частинок металу-цементатора в процесі цементації. Крім того, процес цементації в шаровому млині інтенсифікується ще й за рахунок механо-хімічного (трібогальванического) ефекту, що виникає при руйнуванні частинок металу або їх І деформації. В одному з патентів цементацію пропонують проводити в шаровому млині порошковим металом-цементатора. Цементацію ртуті сталевою або чавуновою стружкою в шаровому млині пропонують вести в іншому патенті. Головним недоліком шарових млинів-цементаторів є велика витрата енергії [1].

Механічні агітатори. Механічні агітатори складаються з циліндричних ємностей із пристроями, що представляють собою лопатні (різної форми) мішалки, закріплені на вертикальному (похилому) валу. Застосовують їх найчастіше в процесах цементаціонного очищення цинкових розчинів від домішок. Ємність промислових агітаторів становить 50 - 170 м. Швидкість обертання мішалок повинна бути такою, щоб забезпечити суспензування твердої фази [1].

Вібраційні цементатори. Вібраційні цементатори представляють собою ємності з віброперемішувальним органом - вертикальним штоком (штоками), на який насаджені перфоровані диски (рис. 1.3). Оптимальне співвідношення між діаметрами диска і корпуса апарату, що забезпечує інтенсивне перемішування, становить 0,3 - 0,4. В даний час розроблені та експлуатуються віброагітатори з корисним об'ємом 20 м3 з трьома електромагнітними віброприводами. Недоліком віброцементаторів є висока витрата енергії і наявність низькочастотних вібрацій, що шкідливо позначаються на стані здоров'я обслуговуючого персоналу.

Рисунок 1.3. Схема напрямків потоків рідини при віброперемішуванні

Реактори з затопленим струменем. Реактори-цементатори із затопленими турбулентними струменями були вперше запропоновані І.І. Дзліевим . Конструкція цементаторів дозволяє у верхній відстоювальній частині класифікувати цементний осад 00 величини. Класифікує цементатора спрощеної конструкції, складається з реакційної камери, в яку через сопло подається тангенціально розчин, і класифікує частини - конуса, що розширюється догори під кутом < 60° (рис. 1.4). Перевагою запропонованого цементатора є високий ступінь турбулізації і внаслідок цього висока швидкість процесів цементації. Швидкість струменя в апараті досягає 20 – 25 м/с. Питома продуктивність апарату за розчином доходить до 200 $м^3$/год на 1 $м^3$ його об’єму [1].

Рисунок. 1.4. Реактор-цементатор з затопленим турбулентним струменем :
1 - реакційна камера; 2 - класифікатор; 3 - сопло; 4 - зливний пристрій;
5 - стінка-люк; 6 - оглядове вікно; 7 - зливний патрубок

Конусні цементатори. На рис. 1.5 зображений апарат безперервної дії для цементації міді залізом, розроблений компанією "Кеннекотт". Він являє собою бак діаметром 4,27 м і висотою 7,32 м, всередині якого знаходиться перевернутий конус, заповнений залізним скрапом. Розміри конуса: діаметр основи 3,05 м, висота 3,05 м. Стінки конуса мають отвори. Внизу бака встановлено хибне дно. Розчин в апарат подається за допомогою ряду сопел, які перебувають під шаром скрапу. Розчин проходить через товщу скрапу і виводиться у верхній частині згущувача. Цементна мідь збирається на поверхні хибного днища і періодично випускається.

Рисунок 1.5. Схема конусного цементатора:
1 - конус; 2 - хибне дно чана; 3 - сітка з нержавіючої сталі; 4 - залізний скрап

Цементатори киплячого шару. Процес і апарат для цементації металів в киплячому шарі частинок металу-цементатора вперше в світі були запропоновані і впроваджені в 1959 р на комбінаті "Северонікель". Схема апарату приведена на рис. 1.6.

Рисунок 1.6. Реактор-цементатор киплячого шару конструкції "Северонікеля": 1 - переливна труба; 2 - випускні штуцери; 3 - оглядові вікна

Висота киплячого шару часток нікелевого порошку досягає в ньому 5 м Максимальна швидкість розчину спостерігається в нижній частині апарату і досягає 0,08 - 0,10 м / с. Розчин в апарат подається знизу і виводиться у верхній відстійній частині. Розширення в верхній частині апарату робиться для зниження швидкості висхідного потоку (в 25 - 30 разів) і віднесення частинок з розчином [1].

1.2 Експериментально – статистичне моделювання процесу цементації ртуті

1.2.1 Побудова експериментально – статистичної моделі

Кінетичні дослідження, які проводилися за участю співробітників кафедри, показали, що процес цементації доцільно проводити в неперервному режимі в проточному реакторі. За результатами кінетичних досліджень також встановлені фактори, що найбільш суттєво впливають на процес цементації [2], а саме температура розчину, 70 … 90 С (X1), швидкість протікання розчину, 0,125 … 0,292 мл/с (X2) та маса завантаженого алюмінію, 10… 14 г (X3). Показником якості процесу (y) очищення прийнято концентрацію ртуті у розчині після очищення, мг/л.

Оскільки протікання процесу цементації сильно залежить від кожного окремого варіанту реалізації процесу [2], математичну модель процесу доцільно шукати у вигляді регресійного рівняння

Факторний експеримент другого порядку. Завданням факторного експерименту другого порядку є проведення оптимального плану досліджень, отримання нелінійної моделі та її статистичний аналіз. Модель застосовується для пошуку координати оптимуму і може використовуватися для цілей інтерполяції і екстраполяції.

Зазвичай факторний експеримент другого порядку використовується для опису істотно нелінійний об'єктів поліномом

Побудувати плани, за якими можна отримати модель у вигляді (1.1) за допомогою раніше розглянутих алгоритмів не вдається хоча б тому, що умова ортогональності в стовпцях матриці не виконується (сума елементів стовпців не дорівнює нулю). Також потрібно провести велику кількість дослідів. Очевидно, що планування на трьох рівнях 3n неекономічно і тому запропоновано доповнити план ПФЕ 2^n певними точками факторного простору так, щоб виконувалася умова ортогональності або ротатабельності,

Де кожний доданок визначає число дослідів ПФЕ 2n число «зоряних» і число нульових дослідів (в центрі плану). З формули (1.2) випливає, що пропоновані плани (при n> 2) економічніше планів на трьох рівнях (зазвичай $N_0 = 1$) [3].

Великою перевагою таких планів є те, що їх можна отримувати з планів 2n. Для побудови використовується план 2n, лінійна модель за яким при пошуку області оптимуму виявилася неадекватною. Всі проведені експерименти залишаються, а план поповнюється певною кількістю спеціально підібраних «зіркових» точок. Відзначимо, що подрібнена репліка попереднього плану в новому плані доповнюється до повного факторного експерименту, якщо n≤4; при n> 4 можливе використання дробових реплік. Організовані таким чином плани називаються центральними і композиційними. Загальний вигляд плану наведено в табл. 1.1.

Вибір плеча «зіркових» точок і числа нульових точок залежить від критерію оптимального плану. В інженерній практиці широко застосовуються ортогональні і ротатабельні плани другого порядку [3].

Таблиця 1.1 – Приклад центрального композиціного ротатабельного плану експерименту

Номер досліду	x_0	План					Вихідні змінні
		x_1	x_2	x_1x_2	${x_1}^2$	${x_2}^2$	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	y_3
4	+1	-1	-1	+1	+1	+1	y_4
5	+1	+α	0	0	α^2	0	y_5
6	+1	- α	0	0	α^2	0	y_6
7	+1	0	+α	0	0	α^2	y_7
8	+1	0	- α	0	0	α^2	y_8
9	+1	0	0	0	0	0	y_9

Ротатабельний план другого порядку (ЦКРП). Ротатабельність це критерій оптимальності,згідно з яким плани мають дисперсійну матрицю, інваріантну відносно ортогональних осей обертання. Такі плани забезпечують однакову дисперсію передбачення значень функції в усіх точках, рівновіддалених від центра плану [10].

Побудова ротатабельних планів другого порядку - складна математична задача, що вимагає доказів декількох теорем. Скористаємося результатами досліджень, де пропонується умови ротатабельності задавати рівняннями

$$\sum_{u=1}^{N} x^2{}_{iu} = N\lambda_2, \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{n};$$

$$\sum_{u=1}^{N} x^4{}_{iu} = 3\sum_{u=1}^{N} x_{iu}^2 x_{ju}^2 = 3N\lambda_4 \tag{1.3}$$

$$(i \neq j, \;\; i, j = 1, 2, \dots, n),$$

Де n - число факторів; N - число дослідів; λ1 і λ2 - деякі константи, пов'язані нерівністю

$$\frac{\lambda_4}{\lambda_2} > \frac{n}{n+2} \tag{1.4}$$

яке є умовою невиродженості інформаційної матриці ($X^T X$).

Якщо ввести кілька точок на сфері з нульовим радіусом, тобто кілька точок у центрі плану N_0, то можна розрахувати параметр

$$\lambda_4 = \frac{n(N_0 + N_1)}{(n+2)N_1} \tag{1.5}$$

Де $N_1 = N - N_0$ й посилити нерівність (1.5), оскільки

$$\lambda_4 > \frac{n}{n+2} \tag{1.6}$$

«Зоряні» точки ротатабельності планів будують на осях координат факторів з величиною зоряного плеча α, розрахованого за формулою

$$\alpha = 2^{n/4} \tag{1.7}$$

α для дробного факторного експерименту

$$\alpha = 2^{\frac{n-p}{2}} \tag{1.8}$$

Де n - число факторів;

p - визначає дробність репліки (p = 1 - напіврепліки, p = 2 - чверть репліки і т.д.)

Вибір α, числа «зіркових» і числа нульових точок зручно робити з табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Параметри рота табельних планів другого порядку

Найменування елементів плану	ПФЕ 2^n				ДФЕ 2^{n-p}
	n=2	n=3	n=4	n=5	n=5
Число дослідів у ядрі матриці	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^{5-1} = 16$
Число «зоряних» точок	4	6	8	10	10
Число нульових точок	5	6	7	10	6
Значення α	1,414	1,682	2,000	2,378	2,000

Розрахунок коефіцієнтів регресії. Специфічний характер матриці (X^TX) дозволяє отримати загальні формули для розрахунку коефіцієнта. Основне завдання обчислювальної машини в цьому випадку - видача на друк наступних елементів зверненої матриці [3]

$$\sum_{u=1}^{N} y_u = (0y)$$
$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u = (iy)$$
$$\sum_{u=1}^{N} {x_{iu}}^2 y_u = (iiy) \tag{1.9}$$
$$\sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} y_u = (ijy)$$

Якщо позначити

$$\frac{1}{2\lambda_4[(n+2)\lambda_4 - n]} = A$$

$$\frac{N}{\sum_{u=1}^{N} {x_{iu}}^2} = C \tag{1.10}$$

То з урахуванням (1.5), (1.9) і (1.10) коефіцієнти регресії можна визначити за формулами

$$b_0 = \frac{A}{N}[2{\lambda_4}^2[(n+2)(0y) - 2\lambda_4 C \sum_{i=1}^{N}(ijy)] \tag{1.11}$$

$$b_i = \frac{C}{N}(iy) \tag{1.12}$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N}\{C^2[(n+2)\lambda_4 - n](iiy) + C^2(1-\lambda_4)\}\sum_{i=1}^{N}(iiy) \tag{1.13}$$

$$b_{ij} = \frac{C^2}{N\lambda_4}(ijy) \tag{1.14}$$

Оцінка значущості коефіцієнтів регресії. Дисперсії для коефіцієнтів регресії розраховується за формулами

$${s_{b_0}}^2 = \frac{2A\lambda_4(n+2){s_0}^2}{N} \tag{1.15}$$

$${s_{b_i}}^2 = \frac{C{s_0}^2}{N} \tag{1.16}$$

$${s_{b_{ii}}}^2 = \frac{2[(n+1)\lambda_4 - (n-1)]C^2{s_0}^2}{N} \tag{1.17}$$

$${s_{b_{ij}}}^2 = \frac{C^2{s_0}^2}{N\lambda_4} \tag{1.18}$$

Де ${s_0}^2$ – дисперсія досліду

Оцінка значущості коефіцієнтів регресії проводиться по критерію Ст'юдента

$$t_{ip} = \frac{|b_i|}{s_{b_i}} \tag{1.19}$$

Якщо виявиться, що

$$t_{ip} > t_{\text{т}} \ \ (f_0 = N_0 - 1, q = 0.05) \tag{1.20}$$

Для числа ступеней вільності f_0 та заданого рівня значущості q , то і – ий коефіцієнт визначається значущим. Якщо незначущиим виявився один з квадратичних ефектів, то після його виключення з рівняння регресії необхідно порахувати заново (це пов'язано з неортогональностю квадратичних стовпців матриці планування). Решта незначущі коефіцієнти випускаються без перерахунку рівняння [10].

Перевірка адекватності рівняння регресії. Перетворення ротатабельного плану дещо змінили формули розрахунку дисперсії.

Так, суму квадратів відхилень в центрі плану можна підрахувати за формулою

$$S_0 = \sum_{k=1}^{N_0} (y_{0k} - \overline{y_0}),\ f_0 = N_0 - 1 \tag{1.21}$$

Де f_0 – число ступеней вільності цієї суми

Дисперсія досліду визначається діленням суми (1.21) на f_0

$$s_0{}^2 = \frac{S_0}{N_0} - 1 \tag{1.22}$$

Остаточна сума квадратів обчислюється так

$$\begin{gathered} S_{\text{ост}} = \sum_{u=1}^{N} (\widehat{y_u} - \overline{y_u})^2 \\ f_{\text{ост}} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{gathered} \tag{1.23}$$

Сума квадратів $S_{\text{ад}}$ яка оцінює адекватність моделі, розраховується по формулі [3].

$$\begin{gathered} S_{\text{ад}} = S_{\text{ост}} - S_0 \\ f_{\text{ад}} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2}(N_0 + 1) \end{gathered} \tag{1.24}$$

Розрахункове значення критерію Фішера формують як відношення дисперсії адекватності до дисперсії досвіду (1.25) й порівнюють з табличними значеннями $F_{\text{Т}}$ для ступенів свободи $f_{\text{ад}}$ и f_0 по відомим рівностям

$$F_{\text{р}} = \frac{S_{\text{ад}}}{s_0{}^2} \tag{1.25}$$

$$F_{\text{р}} < F_{\text{Т}}\ \ (q = 0.05) \tag{1.26}$$

Якщо умова (1.26) не виконується, то нелінійна модель, отримана за планом ЦКРП неадекватна. У цьому випадку потрібна зміна порядку полінома (перехід до поліному третього порядку) додавання факторів в рівняння регресії або ретельний аналіз помилок в експерименті (які утворюються, наприклад, внаслідок тимчасового дрейфу [3].

1.2.2 Оптимізація процесу на основі побудованої моделі

Однією з найбільш розповсюджених задач, для вирішення яких проводять дослідження технологічних процесів, є виявлення таких умов, які забезпечують найкращі з тієї чи іншої точки зору значень функції відгуку. Така задача називається задачею оптимізації. В залежності від фізичного змісту функції відгуку, такі задачі класифікують за типами:

– найбільше – найкраще, або максимізація – функція відгуку при цьому може бути, наприклад, вихід готового продукту, прибуток, вміст цінного компоненту, тощо;

– найменше – найкраще, або мінімізація – функція відгуку при цьому може бути, наприклад, викиди забруднювачів в оточуюче середовище, вміст побічних продуктів, витрати на виробництво, тощо;

– номінальне – найкраще, або номіналізація – функція відгуку при цьому може бути, наприклад, геометричні розміри або масу одиниці готового вибору, колір, смак, тощо.

Очевидно, що в експериментально-статистичних моделях другого і вищих порядків ступінь впливу факторів за значення функції відгуку в різних точках факторного простору не постійна і суттєво залежить від значень інших факторів. Тому, окрім власне задачі оптимізації, на основі експериментально-статистичної моделі вирішується і супутня їх задача – ранжування факторів за значущістю випливу в точці екстремуму [10].

Оптимізація процесів на основі експериментально-статистичних моделей. В теорії вирішення задач оптимізації прийнято описувати алгоритми пошуку мінімуму, а інші типи задач при цьому зводяться до задач мінімізації шляхом нескладних перетворень. Задача мінімізації переводиться в задачу максимізації шляхом простої корективи алгоритму, тобто заміни меншого на більше, градієнту на антиградієнт, або використовуючи перетворення:

$$\max_X(\hat{y}) = \min_X(-\hat{y}).$$

Задача номіналізації переводиться в задачу мінімізації використовуючи перетворення самої цільової функції.

$$\hat{z} = |\hat{y} - y_N| \to \min$$

де y_N – номінальне значення функції відгуку.

В останній формулі замість модуля інколи використовують квадрат різниці. Визначити максимальні та мінімальні значення вихідної змінної y можна декількома шляхами. Розглянемо окремо кожен з них.

Найпростішим шляхом для вирішення задачі оптимізації є перебір значень всіх факторів в області пошуку екстремуму з певним кроком. Такий підхід називається скануванням області варіювання або мультистратом. В результаті утворюється таблиця значень функції відгуку, серед яких обирають оптимальне. Серйозним недоліком такого підходу є велика кількість обчислень функції відгуку, яка різко зростає при збільшенні кількості факторів в експериментально-статистичній моделі і зменшенні кроку сканування. Наприклад, при застосуванні мультистрату для експериментально-статистичної моделі, в яку введені два фактори з кроком зміни кожного з них 0,1 (область варіювання факторів в кодованій формі, як відомо, лежить в межах [–1; 1]), необхідно провести $21^2 = 441$ розрахунків за моделлю. У випаду трьох факторів ця кількість вже буде складати $21^3 = 9261$ розрахунок, для чотирьох факторів – 194481 розрахунок. Якщо крок сканування зменшити в два рази до 0,05 то кількість обчислень функції відгуку буде складати 1681, 68921 і 2825761 розрахунок відповідно.

Другим шляхом вирішення задачі оптимізації буде аналітичний метод пошуку з використанням необхідної умови екстремуму функції декількох змінних. Тобто, для моделі виду(1.1), коефіцієнти якої визначено, шукають часткові похідні послідовно за кожним з факторів, а потім вирішують систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial x_i} = 0,\ i = (\overline{1, n}) \qquad (1.27)$$

Розв'язком такої системи будуть координати точки факторного простору x_i^{opt}, в якій осягається екстремум функції відгуку $\hat{y}$. Підставивши ці значення в експериментально-статистичну модель, розраховуються оптимальне значення функції відгуку. Недоліком такого підходу є те, що система (1.27) може не мати розв'язків, або мати нескінченну їх кількість. Крім того, в цьому підході не передбачена можливість врахування обмеження на фактори, через що одержана в результаті розв’язку системи (1.27) точка може опинитися далеко за областями варіювання, а можливо і за областями визначення факторів, що, зокрема не гарантує точність одержаного розв'язку і унеможливлює його практичну реалізацію [10].

Вирішити задачу оптимізації можна також чисельними методами нелінійного програмування, як градієнтними так і безградієнтними. Ці методи дозволяють враховувати обмеження на фактори, а також дозволяють застосовувати комп’ютерну техніку до вирішення поставленої задачі. При вирішенні задачі оптимізації числовими методами, як відомо, задають точність оптимізації і початкову точку. При оптимізації на основі експериментально-статистичних моделей точність оптимізації обирають так, щоб вона на один-два порядки перевищувала точність визначення самої функції відгуку. Початкову точку рекомендується відшукати скануванням області варіювання факторів з достатньо великим кроком, щоб мінімізувати об'єм розрахунків. Зокрема випадку моделі з кодованими факторами, таким крок може бути 0,2 ÷ 0,25. Ця процедура має назву попереднє сканування і дозволяє помістити початкову точку пошуку в область притягання глобального оптимуму і уникнути таким чином локальних [10].

Ранжування факторів в точці екстремуму. Окрім власне пошуку оптимального значення доцільно розглянути задачу оцінки впливу факторів на значення функції відгуку в точці екстремуму. Для вирішення такої задачі на основі одержаної експериментально-статистичної моделі будують часткові однофакторні моделі виду:

$$\hat{y}_i = b_i' x_i + b_{ii}' x_i^2 \quad (1.28)$$

При побудові таких моделей, всі фактори, крім досліджуваного, фіксують в точці оптимуму, а потім відкидають всі регресори, що не містять досліджуваного фактора. Для однофакторних моделей знаходять максимальне (y_{imax}) і мінімальне (y_{imin}) значення в області варіювання досліджуваного фактора, Про ступінь впливу фактора судять за величиною:

$$\Delta y_i = y_{imax} - y_{imin}.$$

Очевидно, що зі зростанням значущості фактора зростає його вплив на значення функції відгуку, і тим далі від оптимального зміститься значення функції відгуку при зміні цього фактора. Тобто, чим більш значущий фактор, тим точнішого вимірювання і ретельнішого контролю він потребує.

Висновки до розділу 1

Таким чином в даному розділі розглянуто процес цементації як об'єкт моделювання, оглянуті методи експериментально-статистиного моделювання, які застосовані до даного об'єкту та представлені результати вирішення задачі моделювання та оптимізації процесу цементації ртуті водного розчину.

2 Методи дослідження

2.1 Задачі оптимізації в умовах невизначеності, типи невизначеностей

Джерела невизначеностей при оптимізації складних систем. Невизначеність в задачах виникає там, де дослідник при вирішенні задачі змушений користуватися неточною або неповною інформацією. Існують два основні фактори невизначеності.

В першому випадку джерелом невизначеності є неточність початкових даних про умови функціонування або проектування складних систем. Таку невизначеність називають інформаційною. Вона зумовлюється, зокрема:

– геометричною неточністю, тобто відхиленням розмірів обладнання при виготовленні;
– самовільною зміною внутрішніх умов експлуатації складних систем, наприклад, накопичення осаду на обладнанні, отруєння каталізатора, тощо;
– зміною зовнішніх умов експлуатації складних систем, наприклад, зміною складу природної сировини, сезонними коливаннями температур, тощо [7].

В іншому випадку джерелом невизначеності є неточність математичних моделей що використовуються при вирішення задачі моделювання та оптимізації Така невизначеність зумовлюється:

– неточністю фізичних т хімічних законів, що покладаються в основу моделей;
– необхідністю внесення спрощень та припущень в процесі моделювання;
– неточністю експериментів за допомогою яких одержують коефіцієнти математичних моделей;
– похибками реалізації математичних моделей та методів оптимізації [7].

Таким чином можна констатувати, що велика кількість задач оптимізації, що виникають на практиці будуть задачами оптимізації в умовах невизначеності. В деяких випадках такою невизначеністю нехтують, переводячи задачі в детерміновані. Проте в більшості випадків таке нехтування не можливе і доводиться вирішувати задачу оптимізації в умовах невизначеності [7].

Математична постановка задачі оптимізації в умовах невизначеності. Задача оптимізації складних систем в умовах невизначеності може бути записана наступним чином:

$$\min_{\overline{d}\in D,\,\overline{y}\in Y} \overline{f}\left(\overline{d},\overline{y},\overline{\Theta}\right), \tag{2.1}$$
$$\overline{\varphi}\left(\overline{d},\overline{y},\overline{\Theta}\right)=0,\ \ \overline{g}\left(\overline{d},\overline{y},\overline{\Theta}\right)\le 0.$$

де $\overline{d}$ - вектор конструктивних змінних, його довжина n_d, $\overline{y}$ - вектор перемінних величин системи, його довжина n_y, $\overline{\Theta}$ - вектор невизначених параметрів, його довжина n_Θ, $\overline{\varphi}$ - вектор-функція обмежень типу рівність, розміром n_φ, $\overline{g}$ - вектор-функція обмежень типу нерівність, розміром n_g.

Цільова функція $\overline{f}\left(\overline{d},\overline{y},\overline{\Theta}\right)$ є параметром оптимізації складних систем, тобто числовою характеристикою ефективності її функціонування. Множина конструктивних параметрів $\overline{d}$ включає в себе розміри апаратів складних систем та структурні параметри зв'язків між ними. Очевидно, що зміні вектора $\overline{d}$ визначаються на етапі проектування і на етапі функціонування системи не змінюються. Вектор перемінних величин складних систем містить в собі величини двох типів. Перший тип – це змінні стану системи, за якими характеризується стан системи в певний момент часу. Позначимо ці величини через вектор $\overline{x}$ довжиною n_x. Інші змінні вектору $\overline{y}$ це ті, через які буде здійснюватися керування системою. Виділимо їх у вектор $\overline{u}$ довжиною n_u.

Очевидно, що про функціонуванні складних систем обмеження типу нерівності накладаються саме на змінні стану системи, тобто для довжин вказаних векторів буде справедливе наступне співвідношення [7].

$$\dim \overline{x} = \dim \overline{\varphi}; \ \dim \overline{u} = \dim \overline{y} \text{ - } \dim \overline{x},$$

тоді задача (2.1) набуває вигляду:

$$\min_{\overline{d} \in D, \overline{x} \in X, \overline{u} \in U} \overline{f}\left(\overline{d}, \overline{x}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right), \tag{2.2}$$
$$\overline{\varphi}\left(\overline{d}, \overline{x}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right) = 0, \ \overline{g}\left(\overline{d}, \overline{x}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right) \leq 0.$$

Оскільки розмірність векторів $\overline{x}$ і $\overline{\varphi}$ однакова, то систему обмежень типу рівності можна записати як систему нелінійних рівнянь відносно $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \overline{x}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right), \tag{2.3}$$

Явний вид функцій в системі (2.3) в загальному випадку невідомий, тому значення $\overline{x}$ визначають окремо для кожної сукупності $\left(\overline{d}, \ \overline{u}, \ \overline{\Theta}\right)$. Це є класична задача розрахунку матеріального і теплового балансів системи. Тоді задача оптимального проектування в умовах невизначеності набуває вигляду:

$$\min_{\overline{d} \in D, \overline{u} \in U} \overline{f}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right), \tag{2.4}$$
$$\overline{g}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right) \leq 0.$$

де:

$$\overline{f}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right) \equiv \overline{f}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{x}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right), \overline{\Theta}\right)$$
$$\overline{g}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right) \equiv \overline{g}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{x}\left(\overline{d}, \overline{u}, \overline{\Theta}\right), \overline{\Theta}\right)$$

Слід відмітити, що звичайними методами аналітичного або чисельного розв’язку задача (2.4) не може бути розв’язана, оскільки значення параметрів $\overline{\Theta}$ не визначені [7].

Класифікація невизначених параметрів. Очевидно, що не існує і не може існувати універсальних методів вирішення задачі оптимізації систем в умовах невизначеності. Тому не можна розглядати невизначені параметри взагалі. Усі методи такої оптимізації зорієнтовані в першу чергу на певний вид чи тип невизначених параметрів системи. Отже, перш ніж говорити про методи пошуку оптимальних рішень, спробуємо провести класифікацію самих невизначених параметрів [7].

В сучасній літературі з питань оптимізації складних систем в умовах невизначеності переважають два підходи до класифікації невизначених параметрів. Один з них запропонований провідним фахівцем в цій галузі в бувшому СРСР, нині російським вченим Геннадієм Марковичем Островським. Він пропонує класифікувати невизначені параметри за можливістю встановлення їх значень при переході від етапу проектування до етапу функціонування системи. У відповідності до цього підходу невизначені параметри класифікують на три групи:

1. Параметри, значення яких можна достатньо точно встановити на етапі функціонування. Тобто на етапі функціонування можна отримати експериментальні дані, за якими можна встановити значення невизначених на етапі проектування параметрів (з точністю до похибки експерименту).

2. Параметри, що не можуть бути скореговані на етапі функціонування.

3. Параметри, значення яких можуть бути визначені на етапі функціонування, але з певною похибкою (що перевищує похибку експерименту) [7].

Така класифікація достатньо зручна для вирішення теоретичних задач, проте а практиці її застосування обмежено через те, що в ній ніяк не враховується сама сутність невизначених параметрів. Крім того, така класифікація придатна лише для невизначених параметрів в задачах оптимального проектування і не охоплює всіх можливих задач оптимізації в умовах невизначеності.

Друга класифікація пропонується в закордонній літературі. У відповідності до неї, невизначені параметри класифікуються за формою, або видом описання невизначеності. Пропонується такі чотири форми описання [4]

1. *Нечітка (розмита) невизначеність*. Така форма невизначеності використовується, коли про невизначені параметри або вимоги до системи, що оптимізується задається експертом звичайною мовою, тобто не чітко з точки хору математики, наприклад, «набагато більше десяти», «між трьома і чотирма», «близько ста», тощо. В усіх цих випадках задається не точне або наближене значення невизначеного параметру, а деяка множина його можливих значень, що визначається тим чи іншим «ступенем впевненості» експерта. Для описання такої ситуації використовують методи теорії нечітких множин, основною характеристикою яких є функція приналежності. В даному випадку йдеться про приналежність невизначеного параметра Θ_i до деякої множини *T*, яка описується функцією приналежності $0 \le \mu_T(\Theta_i) \le 1$.

2. *Стохастична (імовірнісна) невизначеність*. Така форма невизначеності виникає тоді, коли невизначеним параметрам $\overline{\Theta}$ можна приписати імовірнісний випадковий характер, тобто всі елементи вектора $\overline{\Theta}$ являють собою випадкові величини. В такому випадку невизначені параметри стають стохастично визначеними, адже для них задається функція розподілу ймовірностей. Враховуючи, що функція розподілу є вичерпною характеристикою випадкової величини, таку ситуацію інколи прийнято характеризувати як детерміновану.

3. *Статистична невизначеність*. Така форма невизначеності виникає, якщо модель об'єкту оптимізації ідентифікують за результатами експериментів за наявності випадкових впливів і похибок. Вказана форма тісно пов'язана з попередньою, проте принципова відмінність полягає в тому, що в умовах обмеженого експерименту можна оцінити лише вибіркові значення параметрів моделі, тобто замість, наприклад математичного сподівання і дисперсії випадкової

величини можна розрахувати вибіркове середнє і вибіркову дисперсію. Очевидно, що точність розрахунку цих величин визначається планом експерименту, дисперсією відтворюваності дослідів, методом оцінювання параметрів, тощо. Достовірність статистичних висновків на основі одержаних оцінок величин суттєво залежить від виду прийнятих законів розподілу і дуже суттєво змінюється при відхиленні від початкових припущень. Вказані обставини призводять до ситуації статистичної невизначеності при вирішенні задач оптимізації.

4. *Інтервальна невизначеність*. Така форма невизначеності є найменш обмеженою і відповідає широкому класу практичних задач. В багатьох прикладних задачах відсутня можливість навіть теоретично розглядати параметри невизначеності як випадкові, наприклад через неможливість забезпечення умов для повторення експериментів. Це призводить до необхідності врахування нестатистичної, або в загальному випадку взагалі невідомої, ймовірності, коли відносно невизначених параметрів $\overline{\Theta}$ невідомо нічого, окрім їх властивості бути обмеженими. В таких умовах невизначені параметри описують у інтервальній формі, тобто задають області їх невизначеності – діапазони їх можливих значень:

$$\Theta_i^L \le \Theta_i \le \Theta_i^U$$

де Θ_i^L, Θ_i^U відповідно верхня та нижня межі області невизначеності. Це значить, що невизначений параметр Θ_i може приймати будь-яке значення з інтервалу $\left[\Theta_i^L, \Theta_i^U\right]$ і при цьому йому не можна приписати імовірнісної міри, тобто не можна задати ніякої функції розподілу невизначеного параметра в заданому інтервалі.

Очевидно, що наведена класифікація більш універсальна і охоплює всі можливі математичні способи опису невизначених параметрів. Така класифікація зручна для обрання методів оптимізації в умовах невизначеності [4].

1. Якщо переважна більшість невизначених параметрів має нечіткий (розмитий) характер то математичне описання системи буде надзвичайно ускладнене. Оптимальне рішення в цьому випадку шукають шляхом опитування експертів. Якщо нечітких параметрів відносно небагато, то для невизначених параметрів уточнюють межі і задачу зводять до випадку інтервальної невизначеності.

2. Для розв'язку задач зі стохастичною невизначеністю пропонуються методи стохастичного програмування. Для випадку, коли система описується лінійними або лініалізованими моделями, такі методи відомі і добре розроблені. В той же час, розробка ефективних алгоритмів нелінійного стохастичного програмування є актуальною науковою задачею.

3. Задачі, які містять статистично невизначені параметри розв'язують переважно шляхом побудови моделей з інтервальними коефіцієнтами та подальшим пошуком оптимальний умов на їх основі.

4. Інтервальна невизначеність в задачах оптимізації в умовах невизначеності зустрічається на практиці найчастіше. Це, переважно, будуть задачі оптимального проектування. Для розв'язку цих задач розроблені ряд методів розв'язку, зокрема методи теорії гнучкості, що зводяться до пошуку верхніх та нижніх оцінок оптимального рішення або методи що використовують поняття «коефіцієнти запасу» [4].

2.2 Побудова експериментально – статистичної моделі з інтервальними оцінками коефіцієнтів

Основні положення інтервального аналізу даних. Припустимо, що особа що приймає рішення має в наявності результати експериментальних досліджень, проведених на певному об'єкті. Задача, що постає перед ОПР – визначити оптимальні з тієї чи іншої точки зору, умови функціонування цього об'єкту. Якщо є достатньо передумов, щоб вважати що похибки в експериментах розподілені по нормальному закону, то умови можна вважати детермінованими і задача оптимізації зводиться до побудови експериментально-статистичної моделі з наступним прийняттям рішень на її основі. Проте в більшості випадків в реальних умовах у ОПР наявний лише статистичний матеріал – результати проведених експериментів і будь-яка інформація про розподіл величин відсутня. В цьому разі постає задача оптимізації в умовах статистичної невизначеності [10].

Для математичного моделювання системи в таких випадках застосовують інтервальний аналіз даних в результаті якого будують інтервальні моделі досліджуваних систем. Метод побудови інтервальних моделей базується на трьох основних початкових гіпотезах:

1. Залежність між вихідною змінною y_0 і незалежними змінними $x_1 \ldots x_n$ є лінійно-параметричними функціями виду:

$$y_0 = \beta_1\varphi_1(\vec{x}) + \beta_2\varphi_2(\vec{x}) + \ldots + \beta_m\varphi_m(\vec{x}) = \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{\beta}\ . \tag{2.5}$$

де $\varphi_1(\vec{x}), \varphi_2(\vec{x}), \ldots \varphi_m(\vec{x})$ - відомі базисні функції вектору незалежних змінних $x_1 \ldots x_n$.

2. Результати експерименту описуються сукупністю N дослідів:

$$\vec{x}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})^T, [y_i^-, y_i^+]$$

де y_i^-, y_i^+ задають для i-ого досліду (за фіксованого вектора $\vec{x}_i$) межі можливих значень істинної величини $y_0(\vec{x}_i)$, тобто:

$$y_i^- \le y_0(\vec{x}_i) \le y_i^+,\ i = 1 \ldots N \tag{2.6}$$

Очевидно, що інтервал $[y_i^-, y_i^+]$ статистично залежить від вектора $\vec{x}_i$.У випадках, коли в результаті експерименту одержано точкове значення величини y, інтервал легко розрахувати знаючи похибку δy експерименту. $y_i^- = y - \delta y$, $y_i^+ = y + \delta y$.

3. Адекватною інтервальною моделлю об'єкту є будь-яка функція, $\hat{y}(x) = \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b}$, що проходить через усі інтервали вимірювань, як показано на рисунку 2.1, тобто задовольняє умові:

$$y_i^- \le \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b} \le y_i^+,\ i = 1...N \tag{2.7}$$

Доцільно нагадати, що в експериментально-статистичному моделюванні під змінною β зазвичай розуміють істинні значення параметрів, зокрема коефіцієнтів моделі, а під змінною b – їх оціночні значення, які одержують статистичними методами[10].

Рисунок 2.1 Адекватна інтервальна модель об'єкту.

y_i^-, y_i^+ – верхня та нижня межі інтервалу вимірювань

Вираз (2.7), після підстановки в нього результатів експериментів, перетворюється на систему N лінійних нерівностей з m змінними $b_1 \ldots b_m$. Очевидно, що ця система має бути сумісною. Тоді множина її розв'язків буде визначатися так:

$$\Omega_b = \left\{ \vec{b} \in R^m \mid y_i^- \le \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b} \le y_i^+,\ i = 1...N \right\}. \tag{2.8}$$

В силу висунутої гіпотези (2.7), підставивши будь-який вектор $\vec{b} \in \Omega_b$ у рівняння $\hat{y}(x) = \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b}$, отримаємо адекватну модель об'єкту. Це значить, що Ω_b являє собою множину оцінок $\vec{b}$ параметрів адекватних інтервальних моделей, тобто ця множина є аналогом довірчої області значень коефіцієнтів в регресійному аналізі. Аналізуючи вирази (2.6), (2.7), (2.8) неважко помітити що ця є множина є множиною значень істинних параметрів інтервальної моделі β і, відповідно, може розглядатися як єдина.

$$\Omega = \Omega_b = \Omega_\beta = \left\{ \vec{\beta} \in R^m \mid y_i^- \le \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{b} \le y_i^+,\ i = 1...N \right\}. \tag{2.9}$$

Однак, слід зауважити, що з (2.9) не слідує, що фіксована точкова оцінка невідомих коефіцієнтів $\vec{b} \in \Omega$ буде співпадати зі значеннями істинних параметрів $\vec{\beta} \in \Omega$. Розглянемо властивості множини Ω докладніше. Для цього позначимо:

– $p(\Omega) = \max\left|b_i - b_j\right|,\ b_i, b_j \in \Omega$ – діаметр множини Ω (рисунок 2.2);

– $F = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_N) & \dots & \varphi_m(x_N) \end{vmatrix}$ – матриця (розмір $N{\times}m$) значень базисних функцій або матриця експерименту.

Рисунок 2.2. Множина Ω можливих значень параметрів.

$p(\Omega)$ – діаметр множини.

Тоді по відношенню до множини Ω справедливими будуть наступні твердження [10]

1. Множина Ω є опуклою множиною в просторі коефіцієнтів. Тобто її зображення являє собою опуклий багатогранник.

2. Якщо ранг матриці $F = m$ то $p(\Omega) \le M$, тобто множина Ω обмежена, де M – деяке додатне число. Якщо ранг матриці $F < m$ то $p(\Omega) \to \infty$, тобто множина Ω необмежена.

3. Якщо $p(\Omega) = 0$ то множина Ω = $\{\vec{b}\}$ включає в себе єдиний елемент, тобто $\vec{b} = \vec{\beta}$.

4. Зі зростанням числа дослідів N множина Ω стягується в точку $\vec{\beta}$, що є точкою істинних значень вектора коефіцієнтів моделі, тобто $(N \to \infty) \to (p(\Omega) \to 0) \to (\Omega \to \vec{\beta})$.

Покажемо, як можна отримати точкові та інтервальні значення коефіцієнтів моделі на основі множини Ω.

2.2.1 Точкові та інтервальні оцінки коефіцієнтів моделі

В деяких випадках ОПР достатньо мати лише наближені точкові оцінки коефіцієнтів моделі. Враховуючи те, що при побудові інтервальних моделей не робиться ніяких суджень щодо ймовірності розподілу похибок коефіцієнтів, вектор істинних значень коефіцієнтів $\vec{\beta}$ може прийматися як будь-яке значення з множини Ω. Тому оптимальну оцінку коефіцієнтів доцільно шукати як найбільш точну серед усіх можливих оцінок $\vec{b} \in \Omega$,тобто мінімізувати відхилення [4].

$$\Delta b = \max_{\vec{\beta} \in \Omega} \left| \vec{b} - \vec{\beta} \right| = \max_{\vec{\beta} \in \Omega} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (b_i - \beta_i)^2} \rightarrow \min \qquad (2.10)$$

На основі (9.6) можна запропонувати три точкові оцінки:

1. Мінімаксна оцінка. $\vec{b}_{MM} = \min_{\vec{b} \in \Omega} \max_{\vec{\beta} \in \Omega} \left| \vec{b} - \vec{\beta} \right|$. Можна довести, що цей вираз зводиться до $\vec{b}_{MM} = \frac{1}{2} \left| \vec{b}_1^0 - \vec{b}_2^0 \right|$, де $\vec{b}_1^0, \vec{b}_2^0$ – найбільш віддалені кутої точки множини Ω, які легко знайти розв'язавши задачу лінійного програмування. Така оцінка враховує найгірший можливий випадок (рисунок 2.3).

2. Середня оцінка. $\vec{b}_{CP} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \vec{b}_i^*$. Така оцінка знаходиться як центр тяжіння множини Ω. В даному випадку k – кількість кутових точок цієї множини.

3. МНК оцінка. $\vec{b}_{MHK} = \left(F^T F \right)^{-1} F^T \overline{Y}$, де F – матриця експерименту (значень базисних функцій), $\overline{Y}$ – середнє значення інтервальних вимірювань. Підкреслимо, що в загальному випадку оцінки коефіцієнтів, одержані за МНК можуть не належати множині Ω, і, відповідно, одержана модель не буде оптимальною, як це визначено гіпотезою (2.6). Принагідно згадаємо, що

МНК оцінка є оптимальною лише у випадках, коли відомо що похибки експерименту розподілені за нормальним законом [4].

Рисунок 2.3. Множина Ω можливих значень параметрів.

При побудові інтервальних моделей часто зручно замінити множину Ω прямокутною гіперпризмою:

$$\Pi^{+} = \left\{ \vec{b} \in R^{m} \mid b_i^{-} \le b_i \le b_i^{+},\ i = 1...m \right\} \tag{2.11}$$

Граничні точки b_i^{-}, b_i^{+} є межами інтервалів оцінок коефіцієнтів моделі. Їх можна визначити шляхом розв'язку задач лінійного програмування: $b_i^{-} = \min\limits_{\vec{b} \in \Omega} b_i$, $b_i^{+} = \max\limits_{\vec{b} \in \Omega} b_i$.

Призма для двомірного випадку зображена на рис. 2.3. Неважко побачити, що $\Pi^{+} \supset \Omega$, тобто призма Π^{+} містить «зайві» точки $\vec{b}$, що не задовольняють умові (2.8).

Якщо задана деяка точкова оцінка коефіцієнтів $\vec{b}^{**}$, то можна побудувати іншу наближуючи гіперпризму Π^{-}, як показано на рис. 2.3. Інтервал значень коефіцієнтів в цьому випадку можна визначити за умовою: $b_I^{-} = \min\limits_{\alpha \in \Omega}\left(b_i^{**} - \alpha\right)$, $b_I^{+} = \max\limits_{\alpha \in \Omega}\left(b_i^{**} - \alpha\right)$.

Очевидно, що якщо сама множина Ω є прямокутною призмою, то $\Pi^{+} = \Pi^{-} = \Omega$. В усіх інших відпадках відмінність множини Ω і призмами Π^{-} і Π^{+} може бути достатньо суттєвою.

Використовуючи вищесказане, наведемо загальний вид експериментально-статистичної моделі з інтервальними коефіцієнтами.

Очевидно, що така модель повинна описувати всю область інтервальних вимірювань:

$$[y(\vec{x})] = [\hat{y}_i^-(\vec{x}), \hat{y}_i^+(\vec{x})]$$

де $\hat{y}^- = \min_{\vec{b}\in\Omega} \varphi^T(\vec{x})\vec{b}$, $\hat{y}^+ = \max_{\vec{b}\in\Omega} \varphi^T(\vec{x})\vec{b}$. Очевидно, що при визначенні як верхньої так і нижньої оцінок в наведених формулах використовується один набір базисних функції. Інтервальну модель можна записати простіше, якщо використати апроксимацію множини Ω і призмами Π^- або Π^+:

$$[y(\vec{x})] = [b_1]\varphi_1(\vec{x}) + [b_2]\varphi_2(\vec{x}) + \ldots + [b_m]\varphi_m(\vec{x}) \tag{2.12}$$

де $[b_i] = [b_i^-, b_i^+]$. Останній вираз показує експериментально-статистичну моделі з інтервальними коефіцієнтами. Довжина інтервалу $[b_i^-, b_i^+]$ буде тим менша, чим точніше проведені вимірювання і при кількості вимірювань що прямує до нескінченності буде збігатися в точку, β_i, яка є істинним значенням відповідного коефіцієнта [4].

2.2.2 Вибір виду інтервальної моделі та оцінка значущості її коефіцієнтів.

Оскільки множина Ω, що описується формулою (2.6) (дивись перше питання лекції), визначає область можливих значень коефіцієнтів β_i, перевірка різноманітних гіпотез у відношенні вектора $\vec{\beta}$ та його компонентів β_i при інтервальному аналізі є достатньо простою задачею. Зокрема, перевірка значущості інтервальних оцінок коефіцієнтів відбувається за наступним правилом:

– якщо $\vec{0} \in \Omega$, тобто нульовий вектор є складовою частиною множини значень коефіцієнтів Ω, то всі коефіцієнти моделі незначущі, тобто зв'язок між вихідною змінною і вхідними відсутній. В такому випадку в якості моделі може бути взято $\hat{y}(\vec{x}) = 0$, що в даному випадку проходить через усі інтервали вимірювань. На практиці така ситуація є крайньою і може виникнути лише у ситуації ,коли досліди проведено надзвичайно неточно;

– якщо область Ω і, відповідно, гіперпризма Π^{+} належить одному октанту гіперпростору коефіцієнтів то всі коефіцієнти моделі значущі;

– будь-який інтервальний коефіцієнт може бути визнано значущим, якщо його верхня і нижня оцінка мають однакові знаки, тобто $sign\left(b_i^-\right) = sign\left(b_i^+\right)$.

Для випадку двох коефіцієнтів ці ситуації зображені на рисунку 2.4

Рисунок 2.4. Множина Ω.

а) коефіцієнт β_2 незначущий; б) обидва коефіцієнти значущі.

Очевидно, що за умови наявності достатньої кількості експериментальних даних, завжди можна отримати адекватну інтервальну модель. Для цього можна, наприклад, ускладнити систему базисних функцій $\vec{\varphi}(\vec{x})$, зокрема, якщо $\vec{\varphi}(\vec{x})$ ступенева функція то збільшити ступінь полінома. Однак, так сам як і в регресійному аналізі, існує небезпека переускладнити одержану інтервальну модель. Тому постає задача вибору оптимальної складності інтервальної моделі, тобто оптимальної структури і кількості коефіцієнтів у ній [4].

Для того, щоб вирішити цю задачу розглянемо дві інтервальні моделі:

$$\hat{y}_1 = \varphi^T\left(\vec{x}\right)\vec{b}^{(m)} + \psi^T\left(\vec{x}\right)\vec{b}^{(k)} \tag{2.13}$$

$$\hat{y}_2 = \varphi^T\left(\vec{x}\right)\vec{b}^{(m)} \tag{2.14}$$

де $\vec{b}^{(m)}, \vec{b}^{(k)}$ – вектори коефіцієнтів розмірами *m* і *k* відповідно.

Припустимо, що обидві ці моделі адекватні у сенсі гіпотези (2.6). Неважно помітити, що модель (2.14) є частиною моделі (2.13), тобто є більш простою. Розглянемо граничні похибки передбачень цих моделей Δy_1 і Δy_2 і знайдемо їх різницю:

$$\Delta y_1 - \Delta y_2 = \left[\max\left(\varphi^T(\vec{x})\vec{b}^{(m)} + \psi^T(\vec{x})\vec{b}^{(k)}\right) - \min\left(\varphi^T(\vec{x})\vec{b}^{(m)} + \psi^T(\vec{x})\vec{b}^{(k)}\right)\right] -$$
$$- \left[\max\left(\varphi^T(\vec{x})\vec{b}^{(m)}\right) - \min\left(\varphi^T(\vec{x})\vec{b}^{(m)}\right)\right] = \max\left(\psi^T(\vec{x})\vec{b}^{(k)}\right) - \min\left(\psi^T(\vec{x})\vec{b}^{(k)}\right).$$

Очевидно, що різниця максимального і мінімального значення не менша нуля. А це значить, що гранична похибка простішої моделі $\hat{y}_2$ принаймні не більша ніж похибка більш складної моделі $\hat{y}_1$. Таким чином, сформулюємо правило:

Найкращою інтервальною моделлю слід вважати найбільш просту за структурою і кількістю коефіцієнтів функцію що проходить через усі інтервальні виміри [4].

Якщо клас базисних функцій відомий заздалегідь (наприклад якщо базисні функції ступеневі), то процедура побудови найкращої інтервальної моделі передбачає перевірку значущості коефіцієнтів. При цьому незначущі коефіцієнти послідовно відкидаються, до тих пір доки модель залишається адекватною. Одержана після останнього відкидання модель буде найкращою інтервальною моделлю в тому сенсі що буде найпростішою и найбільш точною.

2.3 Моделі критерії

2.3.1 Інтервальна модель критерію

Припустимо, що задача оптимізації зведена до вигляду $\min\limits_{x \in X}[f(x)]$, де X – точно відома допустима множина; $[f(x)] = [f^-(x), f^+(x)]$ – критерій, представлений у формі інтервальної моделі, заданої межами коридору $f^-(x)$ і $f^+(x)$ можливих значень невідомого дійсного критерію $f_0(x)$.

Нехай дійсний критерій $f_0(x)$ належить деякому класу функцій F і задовольняє умові

$$f^-(x) \le f_0(x) \le f^+(x) \qquad \forall x \in X, \qquad f_0(x) \in F.$$

Ця умова породжує на множині X множину функцій

$$f_0(x) \in F \mid f^-(x) \le f_0(x) \le f^+(x),$$

кожна із яких може співпадати із невідомим дійсним критерієм $f_0(x)$, і не можна віддати перевагу жодній з них. В подальшому таку множину функцій будемо записувати у вигляді $[f(x)]$ [4].

В розглянутому випадку найбільш природно в якості первинного ввести не відношення нерозрізненості рішень, а відношення переваги рішення із умови

$$x_i \succ x_j \leftrightarrow f(x_i) < f(x_j) \qquad \forall f(x) \in [f(x)]. \tag{2.15}$$

Як видно, рішення x_i у відповідності з умовою (2.15) строго краще x_j, якщо x_i забезпечує менше значення будь-якої можливої оцінки цільової функції, проведеної всередині заданого інтервалу $[f(x)]$. Очевидно, що відношення переваги у формі (2.15) не може викликати заперечень, так як краще з двох рішень є таким при усіх можливих умовах [4].

Відношення нерозрізненості рішень можна ввести як доповнення на множині X відношення переваги (2.15). при цьому отримуємо

$$x_i \approx x_j \leftrightarrow \neg x_i \succ x_j \quad i \quad \neg x_j \succ x_i, \tag{2.16}$$

Тобто два рішення нерозрізнені, якщо жодне з них не краще іншого. Іноді зручніше користуватися також наступними умовами нерозрізненості:

$$x_i \approx x_j \leftrightarrow \exists f(x) \in [f(x)] \mid (f(x_i) - f(x_j)) = 0 \tag{2.17}$$

Нерозрізненість рішень, що відповідає умові (2.17), ілюструється на рис. 11.1, звідки видно, що приріст функції f_1 і f_2, обчислені для рішень x_i і x_j, мають різні знаки.

Відношення переваги і нерозрізненості (2.15) – (2.17) задають модель "$X, \approx, \succ$" в умовах інтервальної невизначеності критерію.

Більш детально цю модель доцільно досліджувати, беручи до уваги структуру функції $f(x) \in [f(x)]$.

Розглянемо три класи функцій: F^1 – довільних однозначних функцій; F^2 – функцій, які є лінійною комбінацією меж; F^3 – багатопараметричних функцій відомого виду.

Рис. 2.5. Нерозрізнені рішення x_i і x_j при інтервальному критерію

2.3.2 Критерій – функція довільного виду

Припустимо, що $f_0(x)$ – однозначна функція, але структура її невідома, тобто $f_0(x)$ може будь-яким чином проходити між межами $f^-(x)$ і $f^+(x)$ інтервалу (рис. 2.6, а).

а **б**

Рис. 2.6. Критерій – функція довільного виду $f(x)$ всередині коридору $[f^-(x); f^+(x)]$

а – можливий вигляд функції $f(x)$; б – порівняння рішень x_i і x_j

Звичайно, що в такому випадку залишається справедливим загальний вираз (2.17) для відношення нерозрізненості, хоча йому вдається надати більш змістовного сенсу.

Дійсно, можна помітити, що в розглянутому випадку при порівнянні рішень $x_i, x_j \in X$ в якості $f_1(x)$ і $f_2(x)$ у формулі (2.17) можна взяти функції, що задовольняють умовам:

$$\begin{aligned} &f_1(x_i) = f^+(x_i) \quad f_1(x_j) = f^-(x_j), \\ &f_2(x_i) = f^-(x_i) \quad f_2(x_j) = f^+(x_j)., \end{aligned} \qquad (2.18)$$

Функції подібного виду зображені на рис. 2.6б. Умови (2.18) означають, що при порівнянні на нерозрізненість двох рішень $x_i, x_j \in X$ не має значення як ведуть себе функції f_1 і f_2 всередині інтервалу на всій множині X, суттєво тільки, які значення вони приймають в заданих точках $x_i, x_j \in X$.

Підставивши формули (2.18) в умову (2.17), отримаємо відношення нерозрізненості, виражене через межі коридору функції $f(x)$:

$$x_i \approx^1 x_j \leftrightarrow (f^+(x_i) - f^-(x_j))(f^-(x_i) - f^+(x_j)) \leq 0$$

Якщо сприймати $[f(x_i)] = [f^-(x_i); f^+(x_i)]$ як інтервальну оцінку невідомого критерію $f(x)$ при фіксованому рішенні $x_i \in X$, то цій умові можна надати ще більш наглядну інтерпретацію [4].

С т в е р д ж е н н я. В задачі з інтервальним критерієм довільного виду рішення $x_i, x_j \in X$ нерозрізнені, якщо їх інтервальні оцінки $[f(x)]$ перетинаються (див. рис. 4.7), тобто

$$x_i \approx x_j \leftrightarrow [f(x_i)] \cap [f(x_j)] \neq \varnothing . \qquad (2.19)$$

Відношення нерозрізненості, задане у формі (2.19), дуже зручне для перевірки. З його допомогою легко побудувати область нерозрізненості будь-якого рішення $x \in X$, а саме:

$$P^1(x) = \{ y \,|\, [f(y)] \cap [f(x)] \neq \varnothing \} .$$

Як видно, множина $P^1(x)$ містить усі рішення у, інтервальні оцінки яких перетинаються з інтервальної оцінкою $[f(x)]$.

Нехай $\overline{f}(x) = 0.5(f^+(x) + f^-(x)),\ \ \Delta(x) = (f^+(x) - f^-(x))$ – функції, що позначають середину інтервалу $[f(x)]$ і його ширину. Тоді умову (2.19) можна переписати в іншій формі:

$$x_i \approx^1 x_j \leftrightarrow (\overline{f}(x_i) - \overline{f}(x_j))^2 \le (\Delta(x_i) - \Delta(x_j))^2 \tag{2.20}$$

З виразу (2.19) випливає, що рішення $x_i, x_j \in X$ розрізнені у випадку критерію довільного виду, якщо інтервальні оцінки не перетинаються. В такому випадку легко вибрати краще з двох рішень, застосовуючи умову

$$x_i \succ^1 x_j \leftrightarrow [f(x_i)] \cap [f(x_j)] \ne \varnothing \text{ і } f(x_i) < f(x_i),\ \forall f(x) \in [f(x)].$$

Використовуючи визначення максимального елемента можна довести наступне.

Твердження. В задачі на мінімум при інтервально-заданій цільовій функції довільного виду множина рішень, що не покращуються визначається виразом

$$X_0^1 = \left\{ x \in X \mid f^-(x) \ge f^+(x^+) \right\}, \tag{2.21}$$

де $x^+ = \arg\max\limits_{x \in X} f^+(x)$. В задачі на максимум X_0^1 знаходиться аналогічно:

$$X_0^1 = \left\{ x \in X \mid f^+(x) \ge f^-(x^-) \right\} \text{ де } x^- = \arg\max\limits_{x \in X} f^-(x).$$

Приклад множини X_0^1 для одномірної моделі наведено на рис. 2.7. Можна довести, що X_0^1 одночасно є областю нерозрізненості рішення x^+, тобто $X_0^1 = P^1(x^+)$.

Рис. 2.7. Множина рішень, що не покращуються, при інтервальному критерії довільного вигляду

Вираз (2.21) описує множину X_0^1 в достатньо конструктивній формі. Зокрема, легко довести, що якщо $f^-(x)$ – опукла на X функція, то множина X_0 опукла. Крім того, справедливо наступне.

Твердження. Задача "$X, \approx, \succ$" з довільною інтервально заданою цільовою функцією $f^-(x) \le f(x) \le f^+(x)$ не визначена, тобто усі рішення на X нерозрізнені, якщо

$$f^-(x) \le f^+(x) \qquad \forall x \in X.$$

Це твердження дозволяє у ряді випадків, спростити перевірку на визначеність.

2.3.3 Критерій – лінійна комбінація меж

Нехай функція $f(x)$ є лінійна комбінація меж, тобто

$$f(x) = \alpha f^-(x) + (1-\alpha) f^+(x) \qquad \alpha \in [1, 0]$$

Природно, і в цьому випадку виконується умова (2.17). Відношення нерозрізненості в цьому випадку набуває вигляду:

$$x_i \approx^2 x_j \leftrightarrow (f^+(x_i) - f^+(x_j))(f^-(x_i) - f^-(x_j)) \le 0, \qquad (2.22)$$

на його основі можна доводити справедливість наступного, доволі загального висновку.

Ствердження. Якщо $f(x)$ є лінійна комбінація границь коридору $f^{-}(x)$ і $f^{+}(x)$, то рішення нерозрізнені, коли їх інтервальні оцінки вкладні одна в одну [4].

Якщо використовувати прийняті вище позначення для середини і ширини інтервалу то умову (2.22) можна переписати в еквівалентній формі:

$$x_i \approx^2 x_j \leftrightarrow (\overline{f}(x_i) - \overline{f}(x_j))^2 \le (\Delta(x_i) - \Delta(x_j))^2. \tag{2.23}$$

Очевидно, що якщо ширина інтервалу не залежить від x, тобто $\Delta(x) = \Delta$, то рішення нерозрізнені, коли $\overline{f}(x_i) = \overline{f}(x_j)$, і отже, інтервальні оцінки співпадають. Порівнюючи вирази (2.23) і (2.17) для функції довільного вигляду, легко помітити, що у першому випадку розрізненість рішень суттєво гірша. Відношення нерозрізненості рішень, заданої у формі (2.19) або (2.23), природнім чином породжує відношення переваги

$$x_i \succ^2 x_j \leftrightarrow (\overline{f}(x_i) < \overline{f}(x_j)\, i\, (\overline{f}(x_i) - \overline{f}(x_j))^2 > (\Delta(x_i) - \Delta(x_j))^2.$$

Таким чином, для випадку, що розглядається побудована модель "$X, \approx^2, \succ^2$".

С т в е р д ж е н н я. Множина рішень, що не покращуються, $X_0^{\,2}$ моделі "$X, \approx^2, \succ^2$" є множиною Парето двокритеріальної задачі:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X}[f^{-}(x)], \\ &\min_{x \in X}[f^{+}(x)]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Крім того, можна довести, що

$$X_0^2 = P^2(x^{+}) \bigcap P^2(x^{-}),$$

де $x^{+} = \arg \min\limits_{x \in X} f^{+}(x), \qquad x^{-} = \arg \min\limits_{x \in X} f^{-}(x).$

Таким чином, в випадку, що розглядається, замість задачі $\min[f(x)]\ (x \in X)$ можна аналізувати і вирішувати еквівалентну задачу (2.24), що дозволяє використовувати програми векторної оптимізації. В одновимірному випадку множина $X_0^{\,2}$ (і, отже, множина Парето) легко шукається графічно (рис. 2.6а).

2.3.4 Критерій – лінійно-параметрезована функція

Дослідження варіанту, коли критерій був функцією довільного вигляду або представлявся лінійною комбінацією границь, можна сприймати як крайні випадки – майже повного “свавілля” або майже повної детермінованості поведінки критерію всередині інтервалу $[f(x)]$.

Розглянемо проміжний випадок, коли $f(x) \in [f(x)]$ є лінійно-параметризованою функцією відомого вигляду, тобто $f(x) = \varphi^T(x)\beta$, де $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ - вектор параметрів; $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T$ - вектор базисних функцій відомого вигляду.

Нехай невизначеність критерію пов’язана з інтервальною невизначеністю його параметрів β, тобто відомо тільки, що β∈[β], де $[\beta] = (\beta_1^- \le \beta_1 \le \beta_1^+, \dots, \beta_m^- \le \beta_m \le \beta_m^+)$ – області можливих значень параметрів β, задані відповідними межами. З урахуванням цього можна записати критерій у вигляді інтервально заданої функції відомого вигляду:

$$[f(x)] = [\beta_1]\varphi_1(x) + \dots + [\beta_m]\varphi_m(x). \tag{2.25}$$

Очевидно, що і в цьому випадку залишається справедливим загальне відношення нерозрізненості (2.17), але з урахуванням інформації про вид функції. Підставивши вираз лінійно-парметризованої функції в умову (2.17), отримаємо нову форму відношення нерозрізненості:

$$x_i \approx^3 x_j \leftrightarrow \exists\, \beta \in [\beta] : (\varphi(x_i) - \varphi(x_j))^T \beta = 0, \tag{2.26}$$

що дозволяє довести наступне.

С т в е р д ж е н н я. Якщо $0 \in [\beta]$, то усі рішення $x_i, x_j \in X$ нерозрізнені між собою, тобто задача "$X, \approx^3, \succ^3$" не визначена.

Очевидно, що це справедливо у випадках, коли границі β_i^-, β_i^+ для усіх параметрів мають різні знак. У найкращій інтервальній моделі знаки границь коефіцієнтів β_i співпадають, тому, умова $0 \in [\beta]$ не може в цьому випадку мати місце.

Якщо використовувати відношення нерозрізненості (2.26) отримаємо відношення переваги рішень у вигляді:

$$x_i \succ^3 x_j \leftrightarrow -x_i \approx x_j, \quad (\varphi(x_i)-\varphi(x_j))^T \beta < 0 \quad \forall \beta \in [\beta].$$

Таким чином, для інтервально заданої лінійно-параметризованої функції (2.25) сформована модель "$X, \approx^3, \succ^3$". При побудові і аналізі області рішень $X_0^{\ 3}$, що не покращуються, виявляється корисним наступний висновок.

Твердження. Модель "$X, \approx^3, \succ^3$" еквівалентна багатокритеріальній задачі оптимізації з однорідними критеріями:

$$\min_{x \in X} \varphi^T(x)\beta_1^{\ *},$$
$$\min_{x \in X} \varphi^T(x)\beta_N^{\ *},$$

і більшість рішень $X_0^{\ 3}$, що не покращуються є множиною Парето.

Тут $\beta_1^*, \dots, \beta_N^*$ - вершини (кутові точки) багатогранника $[\beta]$, $N = 2^m$. Можна довести тотожність $X_0^{\ 3}$ і множини Парето.

При зрівнюванні розглянутих інтервальних моделей справедливі наступні співвідношення

$$X_0^{\ 3} \subset X_0^{\ 2} \subset X_0^{\ 1}, \quad P^3(x^0) \subset P^2(x^0) \subset P^1(x^0).$$

2.4 Методи розв’язання задачі оптимізації в умовах статистичної невизначеності

Задача оптимізації в умовах статистичної невизначеності, вирішується на основі інтервальної моделі, яку можна записати так:

$$\left[y(\vec{x})\right] = [\beta_1]\varphi_1(\vec{x}) + [\beta_2]\varphi_2(\vec{x}) + \dots + [\beta_m]\varphi_m(\vec{x}),$$

де $[\beta_i] = \left[\beta_i^-, \beta_i^+\right]$. Граничні точки β_i^-, β_i^+ є межами інтервалів оцінок коефіцієнтів моделі. Граничні точки β_i^-, β_i^+ можна визначити шляхом розв’язку задач лінійного програмування:

$$y_i^- \le \vec{\varphi}^T(\vec{x})\vec{\beta} \le y_i^+, \; i = 1 \dots N$$

$$\beta_i^- = \min_{\beta \in \Omega} \beta_i, \; \beta_i^+ = \max_{\beta \in \Omega} \beta_i. \qquad (2.27)$$

де: Ω – опукла множина допустимих значень коефіцієнтів; y_i^-, y_i^+ – верхня та нижня межі інтервалу вимірювань.

Найбільш доцільно задати вектор базисних функцій $\vec{\varphi}^T(\vec{x})$ як множину функцій поліному другого порядку для заданої кількості змінних. Зокрема, для випаду двох змінних модель набуває вигляду:

$$\left[y(\vec{x})\right] = [\beta_0] + [\beta_1]x_1 + [\beta_2]x_2 + [\beta_{12}]x_1x_2 + [\beta_{11}]x_1^2 + [\beta_{22}]x_2^2 . \qquad (2.28)$$

Припустимо, що задача оптимізації зведена до вигляду $\min\limits_{x\in X}[f(x)]$, де X – точно відома допустима множина; $[f(x)]=[f^-(x), f^+(x)]$ – критерій, у формі інтервальної моделі, заданої межами коридору $f^-(x)$ і $f^+(x)$ можливих значень невідомого дійсного критерію $f_0(x)$.

Нехай дійсний критерій $f_0(x)$ належить деякому класу функцій F і задовольняє умові:

$$f^-(x) \le f_0(x) \le f^+(x) \qquad \forall x \in X , \qquad f_0(x) \in F .$$

Ця умова породжує на множині X множину функцій $f_0(x) \in F \mid f^-(x) \le f_0(x) \le f^+(x)$, кожна із яких може співпадати із невідомим дійсним критерієм $f_0(x)$, і не можна віддати перевагу жодній з них.

У випадку, коли $f(x) \in [f(x)]$ є лінійно-параметризованою функцією відомого вигляду, тобто $f(x) = \varphi^T(x)\beta$, де $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$ – вектор параметрів; $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T$ – вектор базисних функцій відомого вигляду.

Нехай невизначеність критерію пов’язана з інтервальною невизначеністю його параметрів β, тобто відомо тільки, що $\beta\in[\beta]$, де $[\beta] = (\beta_1^- \le \beta_1 \le \beta_1^+, \dots, \beta_m^- \le \beta_m \le \beta_m^+)$ – області можливих значень параметрів β, задані відповідними межами. З урахуванням цього можна записати критерій у вигляді інтервально заданої функції відомого вигляду:

$$[y(\vec{x})] = [\beta_1]\varphi_1(x) + \dots + [\beta_m]\varphi_m(x).$$

2.4.1 Критерій – лінійна комбінація меж.

У випаду оптимізації роботи парогенератора, коли обидві межі описуються поліноміальними залежностями виду (2.28), множина розв'язків може визначатися за формулою:

$$x_0 = \left\{ x_i \in \left(\alpha \begin{pmatrix} b_1^+ + b_{12}^+ x_2 + 2b_{11}^+ x_1 \\ b_2^+ + b_{12}^+ x_1 + 2b_{22}^+ x_2 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} b_1^- + b_{12}^- x_2 + 2b_{11}^- x_1 \\ b_2^- + b_{12}^- x_1 + 2b_{22}^- x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} i = 1, 2; \\ \alpha \in [0,\, 1] \end{matrix} \right\}, \tag{2.29}$$

тобто фактично є розв'язками системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

При наявності обмежень на змінні множина рішень задачі, що не покращуються, є перетин допустимої множини X' і множини $[x^0]$ безумовних максимумів функції:

$$[X_0] = X' \cap [x^0].$$

Відмітимо, що згідно критерію «лінійна комбінація меж», множина оптимальних розв'язків графічно являє собою лінію [4].

2.4.2 Лінійно-параметризована модель

Якщо модель критерію є квадратичною функцією виду (2.28) для двох факторів: x_1 і x_2, для зручності подальшого аналізу її доцільно записати у вигляді:

$$[y(\vec{x})] = [\beta_0] + x^T [c] + x^T [W] x,$$

де вектор $[c]$ і матриця $[W]$ задані інтервально:

$$[c] = \begin{pmatrix} [\beta_1^-;\, \beta_1^+] \\ [\beta_2^-;\, \beta_2^+] \end{pmatrix}; \tag{2.30}$$

$$[W] = \begin{bmatrix} [\beta_{11}^-;\, \beta_{11}^+] & 0.5[\beta_{12}^-;\, \beta_{12}^+] \\ 0.5[\beta_{12}^-;\, \beta_{12}^+] & [\beta_{22}^-;\, \beta_{22}^+] \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Тоді екстремум функції:

$$[x^0] = -0.5[W]^{-1}[c], \tag{2.32}$$

Для побудови $[x^0]$ можна скористатися методами рішення систем лінійних рівнянь виду $Wx = c$ з інтервально заданими матрицею W і вектором c.

За наявності обмежень на змінні, множина рішень задачі, які не покращуються, є перетини допустимої множини X і множини $[x^0]$ безумовних максимумів функції:

$$[X_0] = X \cap [x^0].$$

Висновки до розділу та постановка задачі до дипломної роботи

Таким чином встановлено,що в задачі яка підлягає вирішенню має місце статистична невизначеність даних. Точкові оцінки коефіцієнтів регресійної залежності не можуть слугувати оптимальними оцінками параметрів експериментально-статистичної моделі. Традиційні пошукові розв’язання задачі оптимізації не можуть бути використані в даному випадку.

У дипломній роботі планується розв’язати наступні задачі

1. На основі результатів експерименту (табл. 2.3) для факторів процесу (табл. 2.2) побудувати експериментально-статистичну модель з врахуванням статистичночної невизначеності наявних експериментальних даних
2. За необхідності провести вдосконалення (модифікації) методів побудови моделі в умовах статичної невизначеності та вирішення задч оптимізації на її основі
3. На основі побудованої в пункті 1 моделі визначити оптимальні умови процесу цементації ртуті
4. Розробити прикладне програмне забезпечення для розв’язання вище наведених задач

Таблиця 2.1 - Фактори процесу та інтервали їх варіювання

Фактор	Визначення	Межі	
		нижня	верхня
x_1	температура розчину, °C	70	90
x_2	швидкість протікання розчину, мл/с	0,125	0,292
x_3	маса завантаженого алюмінію, г	10	14

Таблиця 2.2 - План експерименту

	x_0	x_1	x_2	x_3	${x_1}^2$	${x_2}^2$	${x_3}^2$	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1
3	1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1
4	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
5	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	1
6	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
7	1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1
8	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
9	1	1,68	0	0	2,822	0	0	0	0	0
10	1	-1,68	0	0	2,822	0	0	0	0	0
11	1	0	1,68	0	0	2,822	0	0	0	0
12	1	0	-1,68	0	0	2,822	0	0	0	0
13	1	0	0	1,68	0	0	2,822	0	0	0
14	1	0	0	-1,68	0	0	2,822	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблиця 2.3. Результати реалізації експерименту

№	**y**			
1	0,1484	0,1393	0,1543	0,1435
2	0,3495	0,3153	0,3525	0,3434
3	0,1099	0,1183	0,125	0,1178
4	0,1791	0,1831	0,1801	0,187
5	0,4079	0,4037	0,4167	0,4153
6	0,7276	0,7249	0,7266	0,7301
7	0,2486	0,2451	0,2523	0,2508
8	0,455	0,4585	0,4491	0,4547
9	0,0414	0,0478	0,0448	0,0495
10	0,4614	0,4529	0,4551	0,4658
11	0,3588	0,3595	0,3689	0,3704
12	0,1044	0,1004	0,1025	0,0955
13	0,2812	0,2929	0,2879	0,2903
14	0,7279	0,7322	0,7144	0,7278
15	0,1311	0,1401	0,1282	0,1302

3 Модифікація методів та розроблення програмного забезпечення для вирішення задачі

3.1 Метод Монте-Карло для пошуку інтервальних оцінок коефіцієнтів моделі

Оскільки для задачі, яка вирішувалася у даному дослідження, прийнято рішення про те, що процес описується лінійно-переметризованою функцією з набором базисних функції, нами запропоновано алгоритм визначення інтервальних оцінок коефіцієнтів рівняння регресії, що базується на методі Монте-Карло [7].

На першому кроці алгоритму проведено розіграш достатньо великої кількості випадкових точкових значень коефіцієнтів та відділено ті вектори значень $\overline{\beta}$, для яких виконується умова (3.1).

$$y_i^{\min} \le \overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot \overline{\beta} \le y_i^{\max},\ i = 1...N \tag{3.1}$$

У результаті сформована вибірка ряду векторів адекватних точкових оцінок коефіцієнтів регресійної залежності. На їх основі визначено розширені відрізки інтервальних оцінок $\left[\beta_j^{\min};\beta_j^{\max}\right]$, j = 0, 1, 2,… для кожного окремого коефіцієнту.

На першому кроці алгоритму проведено розіграш достатньо великої кількості випадкових точкових значень коефіцієнтів та відділено ті вектори значень $\overline{\beta}$, для яких виконується умова (3.1). У результаті сформована вибірка ряду векторів адекватних точкових оцінок коефіцієнтів регресійної залежності. На їх основі визначено розширені відрізки інтервальних оцінок $\left[\beta_j^{\min};\beta_j^{\max}\right]$, j = 0, 1, 2,… для кожного окремого коефіцієнту. На другому кроці алгоритму відрізки інтервальних оцінок скорочувалися. У якості інтервальної оцінки значення коефіцієнту регресії залишена та частина відрізку $\left[\beta_j^{\min};\beta_j^{\max}\right]$, на якій відносна частота потрапляння випадкових точкових оцінок була найбільшою [11].

3.2 Методи розв'язування задач оптимізації для трифакторних моделей

Алгоритм розв'язання задачі оптимізації в умовах статистичної невизначеності залежить від прийнятої гіпотези про дійсний вид регресійної залежності між вхідними і вихідними величинами. Згідно [6] передбачається декілька можливих гіпотез, проте з нашої точки зору найбільшої уваги заслуговують дві з них, а саме:

Н1: регресійна залежність є лінійною комбінацією верхньої та нижньої меж, описаних інтервальною моделлю, тобто лінійною комбінацією $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^-$ і $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^+$, де $\overline{\beta}^-$ і $\overline{\beta}^+$ вектори нижніх і верхніх точкових оцінок коефіцієнтів відповідно

Н2: регресійна залежність є лінійно-переметризованою функцією невизначеного виду, яка повністю лежить в межах $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^-$ і $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^+$.

Очевидно, що в результаті розв'язку задачі оптимізації буде отримана множина оптимальних розв'язків, у якій значення технологічних факторів будуть мати інтервальний характер. Відомо що рішення, знайдене за умови справедливості гіпотези Н2 буде містити ширші інтервали значень, ніж знайдене за умови справедливості гіпотези Н1. Оскільки у нас відсутня будь-яка інформація про дійсний вид регресійної залежності, немає підстав аби віддати перевагу будь-якій з цих гіпотез. Знайдемо розв'язки задачі оптимізації, прийнявши кожну з них послідовно [11].

Якщо для математичного опису процесу цементації справедлива гіпотеза Н1 множина оптимальних значень визначається шляхом як множина недомінуючих точок (множина Паретто) у просторі технологічних факторів. Найпопулярнішим способом визначення такої множини є розв'язання задачі багатокритеріальної, у даному випадку двокритеріальної, оптимізації адитивною згорткою окремих цільових функцій з ваговим коефіцієнтом γ. У якості окремих цільових функцій розглядаються верхня та нижня межі інтервалу, який описується побудованою інтервальною моделлю. Тоді для досліджуваної задачі шукана множина рішень буде визначатися як:

Процедура знаходження доповнень полегшується тим, що матриця $[W]$ симетрична.

3.3 Програмне забезпечення для вирішення задачі

3.3.1 Обрання мови та середовища програмування

Для розробки програмного забезпечення було обрано мову програмування C# та середовище розробки - Microsoft Visual Studio 2017

C# (вимовляється Сі-шарп) — об'єктно-орієнтована мова програмування з безпечною системою типізації для платформи .NET. Розроблена Андерсом Гейлсбергом, Скотом Вілтамутом та Пітером Гольде під егідою Microsoft Research (при фірмі Microsoft).

Синтаксис C# близький до C++ і Java. Мова має строгу статичну типізацію, підтримує поліморфізм, перевантаження операторів, вказівники на функції-члени класів, атрибути, події, властивості, винятки, коментарі у форматі XML. Перейнявши багато що від своїх попередників — мов C++, Delphi, Модула і Smalltalk — C#, спираючись на практику їхнього використання, виключає деякі моделі, що зарекомендували себе як проблематичні при розробці програмних систем, наприклад множинне спадкування класів (на відміну від C++).

Microsoft Visual Studio — серія продуктів фірми Майкрософт, які включають інтегроване середовище розробки програмного забезпечення та ряд інших інструментальних засобів. Ці продукти дозволяють розробляти як консольні програми, так і програми з графічним інтерфейсом, в тому числі з підтримкою технології Windows Forms, а також веб-сайти, веб-застосунки, веб-служби як в рідному, так і в керованому кодах для всіх платформ, що підтримуються Microsoft Windows, Windows Mobile, Windows Phone, Windows CE, .NET Framework, .NET Compact Framework та Microsoft Silverlight.

3.3.2 Модульна структура програми

3.3.3 Інтерфейс програмного забезпечення

Графічний інтерфейс користувача, який відкривається при завантаженні програми наведено на рисунку 3.1.

Рисунок 3.1 – Головне вікно програми

Для виконання розрахунків слід ввести початкові дані у відповідні поля та натиснути кнопку «Розрахувати». Після чого на вкладці «Інтервали» з’являються розраховані наступні параметри(рис.3.2):

- Орієнтовні значення оцінок
- Широкий інтервал значень
- Звужений інтервал значень

Після того, як розраховані інтервали оцінок коефіцієнтів, можливо визначити оптимальні значення, при цьому є можливість обрати метод розрахунку.

При натисненні на кнопку «Оптимізувати» на вкладках «Лінійна комбінація верхньої та нижньої межі» та «Лінійно параметризована модель» будуть відображені результати розрахунку (рис. 3.3-3.4).

Рисунок 3.2 – Результати розрахунку на вкладці «Інтервали»

Формування звіту. По завершенню розрахунків, користувач може зберегти всі розрахунки та графік у вигляді звіту(рис. 3.5) , який формується у MSWord за допомогою підключеної бібліотеки MicrosoftWord 16.0 ObjectLibrary.

Рисунок 3.3 – Результати розрахунку на вкладці «Лінійна комбінація верхньої та нижньої межі»

Рисунок 3.4 – Результати розрахунку на вкладці «Лінійно параметризована модель»

Рисунок 3.5 – Сформований звіт у MSWord

При натисненні на кнопку «Вихід» користувач буде попереджений, про те що дані не будуть збережені(рис.3.6).

Рис. 3.6 – Вікно «Попередження»

4 Розв’язання задачі оптимізації процесу цементації ртуті

<u>Розрахунок інтервальних оцінок коефіцієнтів.</u>

Поставлена задача розв’язана за допомогою розробленого програмного забезпечення.

В якості початкових даних введено план та результати експерименти

Як на рис 4.1

Вхідними даними для розрахунку є:

Рисунок 4.1 – Головне вікно програми

На першому етапі побудована модель з інтервальними коефіцієнтами

Метод розв’язання модифіковано та детально викладено у пункті 3.1

Рисунок 4.2 – Результати розрахунку на вкладці «Інтервали»

Таким чином широкий інтервали (призма П+)

–

–

Н1: регресійна залежність є лінійною комбінацією верхньої та нижньої меж, описаних інтервальною моделлю, тобто лінійною комбінацією

$[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^-$ і $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^+$, де $\overline{\beta}^-$ і $\overline{\beta}^+$ вектори нижніх і верхніх точкових оцінок коефіцієнтів у (4) відповідно

Н2: регресійна залежність є лінійно-переметризованою функцією невизначеного виду, яка повністю лежить в межах $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^-$ і $[y]=\overline{\varphi}^T\left(\overline{x}\right)\cdot\overline{\beta}^+$.

Очевидно, що в результаті розв’язку задачі оптимізації буде отримана множина оптимальних розв’язків, у якій значення технологічних факторів будуть мати інтервальний характер. Відомо що рішення, знайдене за умови справедливості гіпотези Н2 буде містити ширші інтервали значень, ніж знайдене за умови справедливості гіпотези Н1. Оскільки у нас відсутня будь-яка інформація про дійсний вид регресійної залежності, немає підстав аби віддати перевагу будь-якій з цих гіпотез. Знайдемо розв’язки задачі оптимізації, прийнявши кожну з них послідовно.

За умови справедливості того, що регресійна залежність є **лінійною комбінацією верхньої та нижньої меж**, отримано наступну множину оптимальних розв’язків:

Рисунок 4.3 – Результати розрахунку на вкладці «Лінійна комбінація верхньої та нижньої межі»

ВИСНОВОК

Розглянуто процес цементації ртуті алюмінієм та запропонована задача його оптимізації в умовах статистичної невизначеності наявних експериментальних даних

Розроблено програмне забезпечення для вирішення задачі моделювання та оптимізації процесів в умовах статистичної невазначеності

побудована експериментально-статистична модель з врахуванням умов статистичної невизначеності

Таким чином у роботі представлено результати вирішення задачі оптимізації процесу цементації ртуті з врахуванням статистичної невизначеності експериментальних результатів. У залежності від прийнятої гіпотези про дійсний вид регресійної залежності, якою описується процес цементації, знайдено дві множини розв’язків задачі оптимізації. Слід відмітити наступні особливості отриманих результатів:

– З технологічної точки зору, результати, отримані в умовах статистичної невизначеності більш прийнятні, оскільки підтримання параметрів процесу у заданих межах більш зручне ніж у заданій точці.

– За наявності будь-якої можливості, слід віддати перевагу результатам оптимізації, отриманим за умови справедливості гіпотези «Лінійна комбінація меж», як більш однозначним.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Алкацев М. Процессы цементации в цветной металлургии /М.И. Алкацев. – Москва: Металлургия, 1981. – 116 с.

2. Бондарь А. Исследование кинетики цементации ртути из растворов / А.Г. Бондарь, И.А. Потяженко // Вестник КПИ, серия химическое машиностроение и технология. – № 12. – 1975. – С. 50–51.

3. Бондарь А. Планирование эксперимента при оптимизации процессов химической технологии (алгоритмы и примеры) / А.Г. Бондарь, Г.О. Статюха, И.А. Потяженко. – Киев: Вища школа, 1980. – 264 с.

4. Вощинин А. Оптимизация в условиях неопределенности / А.П. Волошин, Г.Р. Сотиров. – МЭИ(СССР), «Техника» (НРБ), 1989. – 224 с. – ISBN 5-7046-0001-8

5. Кобзарь А. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А.И. Кобзарь. – Москва.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 816 с. – ISBN 5-922100707-0

6. Кособуцький П. Статистичні та Монте-Карло алгоритми моделювання випадкових процесів у макро- і мікросистемах у MathCAD / П.С. Кособуцький. – Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2014. – 412 с. – ISBN 978-617-607-611-7

7. Островский, Г.М. Технические системы в условиях неопределенности: анализ гибкости и оптимизация / Г.М. Островский, Ю.М. Волин. – Москва, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 319 с.

8. Семенкин, Е. С. Методы оптимизации в управлении сложными системами. Учебное пособие / Е.С. Семенкин, О.Э. Семенкина, В.А. Терсков. – Красноярск: Сибирский юридический институт, 2000. – 254 с. – ISBN 5–93182–008–6.

9. Складанний Д.М., Сорокіна К.В. Врахування статистичної невизначеності у оптимізації процесу цементації ртуті. Міжнародна наукова інтернет-конференція "Інформаційне суспільство: технологічні, економічні

та технічні аспекти становлення (випуск 20)" / Збірник тез доповідей – Тернопіль. –2017. – С 88-91.

10. Статюха Г.О. Вступ до планування оптимального експерименту / Г.О. Статюха, Д.М. Складанний, О.С. Бондаренко. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 124 с.

11. Складанний Д.М., Потапенко Т.Є. Врахування статистичної невизначеності у оптимізації процесу цементації ртуті. Міжнародна наукова інтернет-конференція "Інформаційне суспільство: технологічні, економічні та технічні аспекти становлення (випуск 22)" / Збірник тез доповідей – Тернопіль. –2017. – С 127-129.

12. Лінійна алгебра та аналітична геометрія / В.В. Булдигін, І.В. Алєксєєва, та ін. за ред. В.В. Булдигіна. – Київ: ТВіМС, 2011. – 224 с. – ISBN 966–8725–05–0