Лекция 9

ТАБЛИЧНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Практические расчеты при решении реальных задач симплексным методом выполняются в настоящее время с помощью компьютеров. Однако если расчеты осуществляются без ЭВМ, то удобно использовать так называемые симплексные таблицы.

Рассмотрим алгоритм их составления. Для определенности считаем, что решается задача на отыскание максимума.

I. После введения добавочных переменных систему уравнений и линейную функцию записываем в виде, который называется *расширенной системой:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ F - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0. \end{cases}$$

Предполагаем, что все добавочные переменные имеют тот же знак, что и свободные члены; в противном случае используем так называемый *М-метод (метод искусственного базиса).*

II. Исходную расширенную систему заносим в первую симплексную таблицу. Последняя строка таблицы, в которой приведено уравнение для линейной функции цели, называется *оценочной.* В ней указываются коэффициенты функции цели с противоположным знаком:
$b_i = - c_i$. В левом столбце таблицы записываем основные переменные (базис), в первой строке таблицы — все переменные (отмечая при этом основные), во втором столбце — свободные члены расширенной системы b1, b2, …,bm. Последний столбец подготовлен для оценочных отношений, необходимых при расчете наибольшего возможного значения переменной. В рабочую часть таблицы (начиная с третьего столбца и, второй строки) занесены коэффициенты a_{ij} при переменных из расширенной системы.

Далее таблица преобразуется по определенным правилам.
III. Проверяем выполнение критерия оптимальности при решении задачи на максимум — наличие в последней строке отрицательных коэффициентов $bi < 0$ $(ci > 0)$. Если таких нет, то решение оптимально, достигнут max F = со (в

левом нижнем углу таблицы), основные переменные принимают значения a_{io} (второй столбец), основные переменные равны 0, т.е. получаем оптимальное базисное решение.

IV. Если критерий оптимальности не выполнен, то наибольший по модулю отрицательный коэффициент bi < 0 в последней строке определяет *разрешающий столбец s.*

Составляем оценочные ограничения каждой строки по следующим правилам:

1) ∞, если b_i и a_{is} имеют разные знаки;
2) ∞, если $b_i = 0$ и $a_{is} < 0$;
3) ∞, если $a_{is} = 0$;
4) 0, если $b_i = 0$ и $a_{is} > 0$;
5) $\left|\dfrac{b_i}{a_{is}}\right|$, если a_{i0} и a_{is} имеют одинаковые знаки.

Определяем $\min\limits_{i}\left\{\left|\dfrac{b_i}{a_{is}}\right|\right\}$. Если конечного минимума нет, то задача не имеет конечного оптимума $(F_{\max} = \infty)$. Если минимум конечен, то выбираем строку *q,* на которой он достигается (любую, если их несколько), и называем ее *разрешающей строкой.*

На пересечении разрешающих строки и столбца находится *разрешающий элемент aqs*

V. Переходим к следующей таблице по правилам:

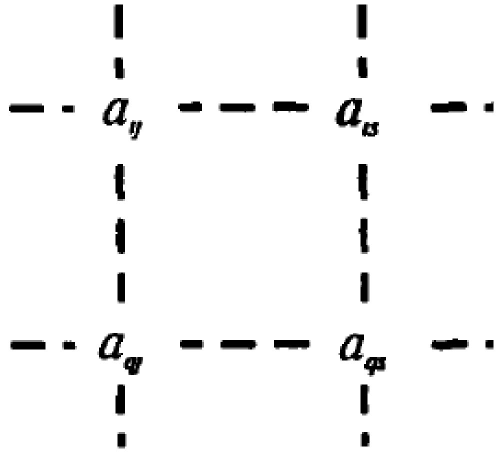
а) в левом столбце записываем новый базис: вместо основной переменной x_q— переменную *xs;* б) в столбцах, соответствующих основным переменным, проставляем нули и единицы: 1 — против "своей" основной переменной, 0 — против "чужой" основной переменной, 0 — в последней строке для всех основных переменных;

в) новую строку с номером *q* получаем из старой делением на разрешающий элемент *aqs;*

г) все остальные элементы a'_{ij} вычисляем по *правилу прямоугольника:*

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}},$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}.$$



Далее переходим к п. III алгоритма.

Пример:
Решить задачу ЛП с помощью симплексных таблиц1.

$$F = 2x_1 + 3x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Расширенная система задачи имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16, \\ x_2 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_6 = 21. \end{cases}$$

Линейную функцию представим в виде $F - 2x_1 - 3x_2 = 0.$
Заполняем первую симплексную таблицу (табл. 1), в которой переменные *x3, x4, x5, x6* основные. Последняя строка заполняется коэффициентами линейной функции с противоположным знаком (см. п. II алгоритма).

Таблица 1

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	18	1	3	1	0	0	0	18/3
x_4	16	2	1	0	1	0	0	16
→ x_5	5	0	1	0	0	1	0	5 ←
x_6	21	3	0	0	0	0	1	∞
F	0	−2	−3 ↑	0	0	0	0	

В соответствии с п. III алгоритма проверяем критерий оптимальности. В последней строке имеются отрицательные коэффициенты. Выбираем из них наибольший по модулю (—3); второй столбец разрешающий, переменная *x2* перейдет в основные (этот столбец отмечен стрелкой). В соответствии с п. IV находим оценочные отношения и $x_2 = \min\{18/3;\ 16;\ 5;\ \infty\} = 5$. Третья строка является разрешающей (отмечена горизонтальной стрелкой). На пересечении разрешающих строки и столбца стоит разрешающий элемент $a_{33} = 1.$

Строим табл. 2 по правилам п. V алгоритма:

а) в новом базисе основные переменные: *x3, x4,* ***x2****,* x6;

б) расставляем нули и единицы; например, в клетке, соответствующей основной переменной *x3* столбцу и строке, ставим 1, а в клетке, соответствующей основной переменной *x3* по строке, а основной переменной *x2* — по столбцу, ставим 0 и т.п. В последней строке против всех основных переменных ставим 0. Третья строка получается делением на разрешающий элемент a33 = 1.

Остальные клетки заполняем по правилу прямоугольника. Например: $b_1' = 18 - \frac{3 \cdot 5}{1} = 3,\quad a_{11}' = 1 - \frac{3 \cdot 0}{1} = 1$ и т.д.

Получим вторую симплексную таблицу (табл. 2)

Таблица 2

Базис	Свободный член	Переменные x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Оценочное отношение
→ x_3	3	1	0	1	0	−3	0	3 ←
x_4	11	2	0	0	1	−1	0	11/2
x_2	5	0	1	0	0	1	0	∝
x_6	21	3	0	0	0	0	1	7
F	15	−2 ↑	0	0	0	3	0	

Критерий оптимальности вновь не выполнен. Теперь первый столбец разрешающий; *x1* — переходит в основные, $\min\{3/1;\ 11/2;\ \infty;\ 7\} = 3;$; первая строка разрешающая, *a11*— разрешающий элемент.

Новая симплексная таблица примет вид табл. 3.

Таблица 3

Базис	Свободный член	Переменные x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Оценочное отношение
x_1	3	1	0	1	0	−3	0	∝
→ x_4	5	0	0	−2	1	5	0	5/5 ←
x_2	5	0	1	0	0	1	0	5/1
x_6	12	0	0	−3	0	9	1	12/9
F	21	0	0	2	0	−3 ↑	0	

И на этот раз критерий оптимальности не выполнен; пятый столбец и вторая строка разрешающие, *a25* = 5 — разрешающий элемент.

Переходим к табл. 4

Таблица 4

Базис	Свободный член	Переменные						Оценочное отношение
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	0	−1/5	3/5	0	0	
x_5	1	0	0	−2/5	1/5	1	0	
x_2	4	0	1	2/5	−1/5	0	0	
x_6	3	0	0	3/5	−9/5	0	1	
F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	

Критерий оптимальности выполнен, значит Fmax = 24, оптимальное базисное решение (6; 4; 0; 0; 1; 3)

Использованная и рекомендуемая литература:

1. Исследование операций в экономике: Учеб. пособие для вузов /Н.Ш. Кремер, Б А Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Кремера. - М: ЮНИТИ, 2002. - 407 с.
2. Кузнецов Ю.Н., Козубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высш. шк., 1980. – 300 с.
3. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989. – 172 с.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций, 7-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.