

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ
РОБІТ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ»
ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.050202
«АВТОМАТИЗАЦІЯ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНІ
ТЕХНОЛОГІЇ»
ЧАСТИНА 1**

Навчальне електронне видання

Затверджено Вченою радою ХТФ НТУУ «КПІ»

Київ 2013

Теорія автоматичного керування: метод. вказівки до викон. лаб. роб. та самостійної роботи з дисципліни «Теорія автоматичного керування» для студ. напр. підг. 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Ч. 1 /Автори: С.Г. Бондаренко, О.В. Сангінова

Гриф надано Вченою радою ХТФ НТУУ «КПІ»,

протокол № 4 від 27.05.2013 р.

Навчальне електронне видання

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ
методичні вказівки і завдання до виконання лабораторних
робіт та самостійної роботи для студентів напряму підготовки
6.050202
6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані
технології »
Частина 1

Автори: Бондаренко Сергій Григорович

Сангінова Ольга Вікторівна

Відповідальний

редактор:

С.Г. Бондаренко, к.т.н., доц.

Рецензент:

В.І. Супрунчук, к.т.н., доц.

Зміст

Передмова	5
Лабораторна робота № 1. Визначення часових характеристик.....	7
Короткі теоретичні відомості	7
Опис лабораторних засобів та обладнання	20
Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи	20
Послідовність виконання роботи	20
Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту.....	21
Контрольні запитання	21
Лабораторна робота № 2. Застосування операційного числення при визначенні часових характеристик.....	22
Короткі теоретичні відомості	22
Опис лабораторних засобів та обладнання	42
Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи	42
Послідовність виконання роботи	42
Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту.....	42
Контрольні запитання	43
Лабораторна робота № 3. Часові характеристики типових ланок САР	44
Короткі теоретичні відомості	44
Опис лабораторних засобів та обладнання	58
Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи	59
Послідовність виконання роботи	59
Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту.....	59
Контрольні запитання	59
Лабораторна робота № 4. Визначення стійкості САР	61
Короткі теоретичні відомості	61
Опис лабораторних засобів та обладнання	76
Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи	76
Послідовність виконання роботи	76
Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту.....	77

Контрольні запитання	77
Лабораторна робота № 5. Частотний критерій стійкості	78
Короткі теоретичні відомості	78
Опис лабораторних засобів та обладнання	93
Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи	93
Послідовність виконання роботи	94
Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту	94
Контрольні запитання	95
Література	96
Додаток А. Заходи безпеки під час виконання лабораторних робіт	98
ІНСТРУКЦІЯ з техніки безпеки при навчанні студентів на ПЕОМ в учбових лабораторіях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету	98
ІНСТРУКЦІЯ про міри пожежної безпеки у лабораторіях, учбових та робочих приміщеннях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету	100
Додаток Б. Рішення диференціальних рівнянь класичним методом в середовищі Mathcad	101
Додаток В. Алгебраїчний критерій стійкості Рауса	107
Додаток Г. Приклади побудови годографа Михайлова в середовищі Mathcad	108

Передмова

Методичні вказівки розроблено відповідно до програми підготовки бакалаврів за напрямом «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». Дисципліна «Теорія автоматичного керування» відноситься до циклу професійної та практичної підготовки і є базовою у підготовці бакалаврів вказаного напрямку.

Робота студента над учбовим матеріалом з кредитних модулів «Лінійні системи» та «Особливі види систем» дисципліни «Теорія автоматичного керування» складається з наступних видів робіт: вивчення матеріалу по навчальних посібниках і підручниках; відвідування лекцій та практичних занять; виконання лабораторних робіт; написання модульних контрольних робіт; виконання та захист розрахунково-графічної роботи; виконання та захист домашньої контрольної роботи; індивідуальні консультації; здача екзаменів. При цьому значна частина часу відводиться на самостійну роботу.

Представлені матеріали мають за мету закріплення знань та набуття вміння застосовувати отримані в процесі вивчення дисципліни «Теорія автоматичного керування» навички при розрахунках систем автоматичного регулювання (САР). Надані теоретичні відомості сприятимуть засвоєнню матеріалу курсу та можуть бути використані під час виконання курсових проектів та робіт, запланованих у дисциплінах професійного циклу, та у дипломному проектуванні.

Дане видання призначено для надання допомоги студентам денної форми навчання напрямку 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» у вивченні зазначених вище кредитних модулів дисципліни «Теорія автоматичного керування». З цією метою у даному виданні наведений перелік тем, які студент повинен вивчити та, за матеріалами яких виконується лабораторні роботи, надані методичні вказівки з виконання цих робіт, наведені основні теоретичні положення з ілюстрацією на конкретних прикладах. Методичні вказівки містять завдання для лабораторних робіт, вимоги до оформлення звіту і контрольні питання для самопідготовки

студентів. У додатку А наведено інструкції з безпеки під час виконання лабораторних робіт.

В частині 1 запропонованих методичних вказівок розглядається матеріал дисципліни: «Теорія автоматичного керування», призначений для вивчення кредитного модуля «Лінійні системи».

Лабораторна робота № 1

Визначення часових характеристик

Мета та основні завдання: Дослідити процес отримання часової характеристики системи автоматичного керування при відомому математичному описі її динаміки. Набути вмінь рішення диференціальних рівнянь за допомогою класичного методу.

Завдання¹. Вивчити види динамічних характеристик; типові вхідні впливи при дослідженні систем автоматичного регулювання. Розглянути вільні і вимушені процеси в лінійній САР; вид представлення вільної складової рішення в залежності від коренів характеристичного рівняння і методи визначення констант інтегрування.

Короткі теоретичні відомості

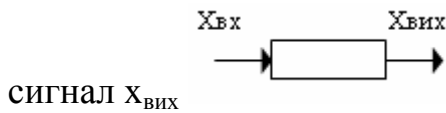
Типові вхідні впливи

Вихідний сигнал динамічного елемента буде по різному відгукуватися на різні сигнали на вході цього елемента. Зовнішні впливи, які діють на САР, є досить різноманітними. Тому при дослідженні САР використовують типові вхідні сигнали і вивчають реакцію системи на них. При цьому, типові (стандартні) впливи мають суттєві параметри реальних впливів і збурень. Зазвичай в автоматичці до типових вхідних впливів відносять: східчастий (ступінчастий) вхідний сигнал, імпульсний вхідний сигнал, гармонічний вхідний сигнал, лінійно зростаючий сигнал і інші. Найбільшого поширення набули ступінчастий та імпульсний сигнали, що подають на вхід досліджуваного об'єкта. Ступінчастим впливом називають миттєву зміну вхідної величини від одного постійного значення досліджуваної системи до іншого. Якщо величина вхідних впливів у вигляді сходинки або імпульсу змінилася на логічну одиницю, то такі впливи називають одиничними.

1. Одинична сходинка.

Нехай на вхід системи поступає сигнал $x_{вх}$, а на виході отримуємо

¹Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.



Одиничну сходинку (одиничний стрибок) позначають $1(t)$ і також називають функцією Хевісайда. Вхід записується: $x_{\text{вх}} = 1(t)$. Одинична сходинка (рис. 1.1) визначається наступним чином:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

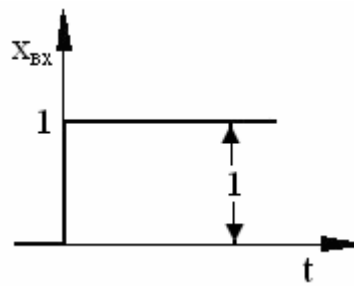


Рис. 1.1. Одинична сходинка

Якщо величина стрибка має амплітуду A , то вхідний вплив може бути записаний через одиничну сходинку: $x_{\text{вх}} = A \cdot 1(t)$.

Функцію Хевісайда фізично складно реалізувати. Проте, якщо, наприклад, на досліджуваному об'єкті різко відкрити вентиль, внаслідок чого витрата речовини, що подається в об'єкт, зміниться стрибком з G_1 до G_2 , то говорять, що на вході об'єкту реалізований стрибкоподібний сигнал величиною $(G_2 - G_1)$, і якщо остання різниця дорівнює одиниці, то на вході реалізується одиничний стрибок. Прикладом задаючого або збурюючого впливу у вигляді раптового стрибка, що зустрічається в САР, є раптове включення або відключення електричного навантаження в електричних мережах.

Реакція САР на ступеневу функцію (перехідний процес, який виникає у системі в результаті вхідного впливу у вигляді сходинки) називається перехідною характеристикою, перехідним процесом, або перехідною функцією. Реакцію динамічної системи на вплив у вигляді одиничної сходинки при нульових початкових умовах часто позначають $h(t)$.

2. Одиничний імпульс.

Імпульсним впливом $\delta(t)$ називають нескінченно велике збільшення вхідної величини з миттєвим поверненням її до попереднього значення (рис. 1.2-а).

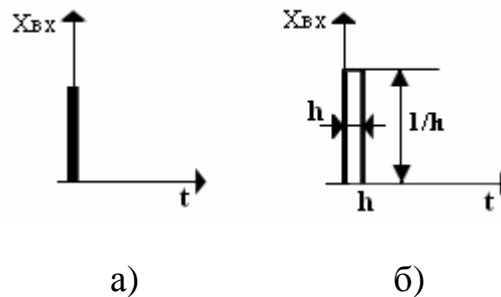


Рис. 1.2 Одиничний імпульс

Так званий одиничний імпульс $\delta(t)$, який ще називають – дельта-функція, функція Дірака, – це функція, що задовольняє наступним умовам:

$$d(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \text{ і так, щоб } \int_{-\infty}^{+\infty} d(t) dt = 1.$$

Дельта-функцію фізично складно реалізувати. Її можна представити як імпульс нескінченно малої тривалості і нескінченно великої амплітуди, тобто як межа, до якої прагне прямокутний імпульс з основою h , висотою $1/h$ і площею, що дорівнює одиниці (рис. 1.2-б) при умові, що $h \rightarrow 0$. Прикладом задаючого або збурюючого впливу у вигляді одиничного імпульсу, що зустрічається в САР, є короткочасний удар навантаження (наприклад, при короткому замиканні в електричній мережі).

Одиничний імпульс можна розглядати як похідну за часом від $1(t)$.

$$\frac{d}{dt}[1(t)] = d(t).$$

Перехідний процес, який виникає у системі в результаті імпульсного впливу називають імпульсною характеристикою.

3. Гармонічний вхідний сигнал.

Гармонічні сигнали (рис. 1.3) $x_{ex}(t)=A\sin\omega t$ і $x_{ex}(t)=B\cos\omega t$ використовується при дослідженні систем автоматичного регулювання частотними методами.

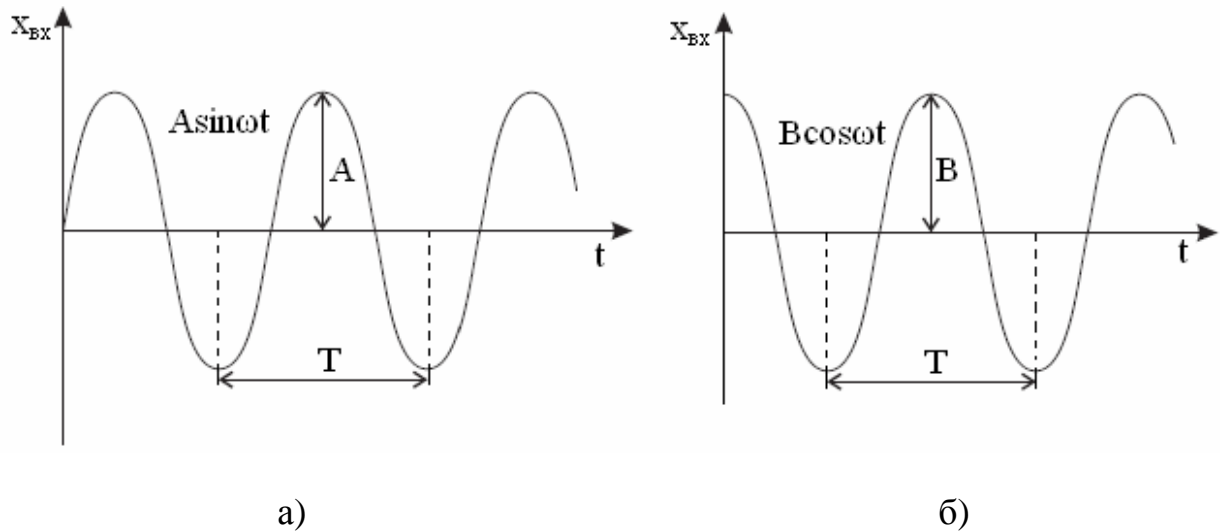


Рис. 1.3 Гармонічні впливи

Гармонічні сигнали характеризується такими параметрами: амплітуда – A, B ; період – T (частота $\omega = 2\pi/T$).

Реакцію динамічної системи на гармонічний вплив називають частотною характеристикою.

Дуже зручною при дослідженні САР являється комплексна форма завдання гармонійної функції:

$$x_{ex}(t) = A_1 e^{j\omega t} = A_1 (\cos \omega t + j \sin \omega t) .$$

4. Лінійно зростаючий вхідний вплив.

Лінійно зростаючий вхідний вплив (рамповий вплив) наведено на рис. 1.4.

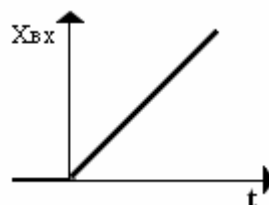


Рис. 1.4 Лінійно зростаючий вхідний вплив

Цей вплив задовольняє наступним умовам:

$$t \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}.$$

При цьому, $t \cdot 1(t) = \int_0^t 1(t) dt$.

Реакцію динамічної на лінійно зростаючий вхідний вплив буде рампова характеристика $r(t)$ (реакція на вхід $t \cdot 1(t)$).

Часова характеристика є узагальненою назвою реакцій системи на типові вхідні впливи, що відображує зміну вихідної величини в часі.

Примітка. Якщо функції Хевісайда і Дірака мають запізнення τ (зсунуті функції), як показано на рис. 1.5, тобто $1(t - \tau)$ і $\delta(t - \tau)$, то вони визначаються наступним чином:

$$\text{функція Хевісайда} - 1(t - \tau) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ 1, t \geq \tau \end{cases},$$

$$\text{функція Дірака} - d(t - \tau) = \begin{cases} 0, t \neq \tau \\ \infty, t = \tau \end{cases}.$$

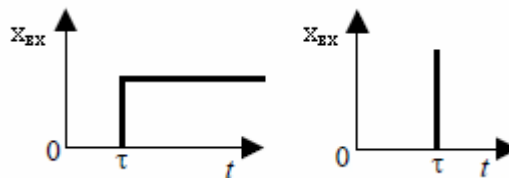


Рис. 1.5 Одинична сходинка і одиничний імпульс із запізненням

Визначення перехідної характеристики класичним методом

Процес регулювання, що протікає в лінійній (або лінеаризованій) системі, може бути визначений шляхом рішення диференціального рівняння даної САР при відомому вхідному впливі і заданих початкових умовах. Аналітичним виразом перехідної характеристики буде рішення рівняння динаміки, що описує систему.

Перехідна характеристика містить в собі багато інформації. Це інформація про характер перехідного процесу, його швидкодію. Також

можна визначити початкове і кінцеве значення перехідного процесу. Порівняння отриманої кривої перехідного процесу з кривими типових ланок дозволить віднести досліджуваний процес до тієї чи іншої елементарної ланки стандартного типу, динамічні властивості якої заздалегідь відомі. Це суттєво спрощує дослідження системи.

Більшість динамічних моделей САР, які розглядають, базуються на лінійних або лінеаризованих рівняннях динаміки і являють собою звичайні диференціальні рівняння з правою частиною. Тому для побудови перехідних характеристик вирішують звичайне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами, яке в загальному випадку має вид:

$$\begin{aligned} a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = \\ = b_m m^{(m)}(t) + b_{m-1} m^{(m-1)} + \dots + b_2 m''(t) + b_1 m'(t) + b_0 m(t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $j(t)$ – вихідний параметр; $m(t)$ – вхідний параметр, $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – коефіцієнти рівняння динаміки.

Для отримання вирішення рівняння (1.1) необхідно задати початкові умови, під якими розуміється стан процесу у момент часу, що прийнятий за його початок, тобто $t = 0$:

$$j(0) = j_0; j'(0) = j'_0; j''(0) = j''_0; \dots; j^{(n-1)}(0) = j_0^{(n-1)}. \quad (1.2)$$

Зазвичай приймаються нульові початкові умови.

Загальне рішення диференціального рівняння (1.1) представляється у вигляді:

$$j(t) = j_{\text{віль}}(t) + j_{\text{виму}}(t), \quad (1.3)$$

де $j_{\text{віль}}(t)$ – вільна складова рішення; $j_{\text{виму}}(t)$ – вимушена складова рішення

Перша складова рішення $j_{\text{віль}}(t)$ називається вільною або власною і визначається як загальне рішення відповідного однорідного диференціального рівняння, яке виходить з (1.1) шляхом прирівнювання нулю правої частини рівняння:

$$a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = 0. \quad (1.4)$$

Відмітимо, що в однорідному диференціальному рівнянні (1.4) права частина дорівнює нулю, що означає відсутність зовнішнього впливу на систему. Тому вирішення однорідного диференціального рівняння (1.4) буде визначати закон зміни вихідної змінної в часі за відсутності зовнішніх впливів, який визначатиметься тільки параметрами і властивостями самої системи, а також початковим запасом енергії в ній. Це так званий вільний процес зміни досліджуваної змінної. Вільний процес зміни змінних має місце в системі в тому випадку, якщо її вивести із стану рівноваги зовнішніми впливами, потім ці впливи прибрати. Фізично очевидно, що для реальних систем вільна складова $j_{віль}(t)$ за відсутності зовнішніх впливів повинна наближатись з часом до нуля. Ця складова існує під час перехідного процесу і в стійких системах з часом зникає, тому її ще називають перехідною складовою або перехідним процесом.

Для визначення загального рішення рівняння (1.4) складається характеристичне рівняння, яке виходить з (1.4) шляхом заміни k -тої похідної на p^k . При цьому сама шукана змінна замінюється на одиницю. З урахуванням цього, отримаємо характеристичне рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (1.5)$$

Загальне рішення складається з ряду доданків, вид яких визначається тим, які корені будуть отримані при рішенні характеристичного рівняння (1.5): дійсні або комплексні і чи є серед них кратні (рівні між собою) корені.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, то вигляд вільної складової рішення $j_{віль}(t)$ є сумою експонент:

$$j_{віль}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (1.6)$$

де c_i – константи інтегрування (коефіцієнти); p_i – корені характеристичного рівняння; t – координата поточного часу; n – порядок рівняння динаміки.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні рівні (кратні), то вигляд вільної складової рішення $j_{віль}(t)$ буде дещо іншим.

При наявності двох однакових коренів характеристичного рівняння $p_1 = p_2$, вільна складова рішення $j_{віль}(t)$ буде мати вигляд:

$$j_{віль}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{p_1 t}.$$

При наявності трьох однакових коренів $p_1 = p_2 = p_3$:

$$j_{віль}(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{p_1 t}. \quad (1.7)$$

При наявності m кратних коренів: $j_{віль}(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^m) e^{p_1 t}$.

Якщо корені характеристичного рівняння (1.5) будуть комплексними $p_{1,2} = a \pm jw$, то експоненти вільної складової з комплексними коренями за формулою Ейлера зводяться до гармонік, і вигляд вільної складової рішення $j_{віль}(t)$ може бути записаний наступним чином:

$$j_{віль}(t) = e^{a \cdot t} (c_1 \cos wt + c_2 \sin wt). \quad (1.8)$$

Вираз (1.8) можна перетворити до вигляду:

$$j_{віль}(t) = A e^{a \cdot t} \cdot \sin(w \cdot t + \gamma), \quad (1.9)$$

де $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$; $\gamma = \text{arctg} \frac{c_1}{c_2}$.

Друга складова загального рішення диференційного рівняння САР $j_{віль}(t)$ визначає вимушений рух системи та її поведінку у сталому режимі і називається вимушеною. Ця складова є частинним рішенням неоднорідного диференціального рівняння (1.1) (з ненульовою правою частиною), і яка при підстановці в ліву частину рівняння (1.1) перетворить його на тотожність. Вимушена складова є значенням вихідної величини, до якої вона наближається при безмежному збільшенні часу. Оскільки вільні рухи при

$t \rightarrow \infty$, як правило, затухають, то вихідна величина наближається до вимушеної складової $j(t) \rightarrow j_{\text{вим}}(t)$. Тому вимушена складова називається ще сталою складовою.

Вид частинного рішення визначається як видом дії, так і параметрами та характеристиками системи автоматичного регулювання.

З математики відомо, що вид частинного рішення визначається видом правої частини рівняння (1.1). Тобто вимушена складова збігається за формою з вхідною функцією (вхідним впливом), і її задають по цій функції з точністю до невизначених коефіцієнтів.

Зокрема, якщо права частина $m(t) = 1$ – константа, то і частинне рішення шукається у вигляді константи – $j_{\text{вим}}(t) = c$. Якщо права частина є гармонійною функцією з визначеними частотою, амплітудою і початковою фазою, то і частинне рішення буде гармонічною функцією тієї ж частоти, для якої потрібно визначити амплітуду і фазу.

Необхідно відзначити, що визначення вимушеної складової в разі дії вхідних впливів складнішої форми, ніж згадані вище, є досить складною задачею.

Тому зазвичай **класичний метод** рішення диференціальних рівнянь застосовується для рішення лінійних диференціальних рівнянь не вище третього порядку (при збільшенні порядку рівняння зростає складність обчислень), а також тоді, коли **права частина рівняння виражається простою функцією** – постійною величиною або гармонічною функцією [2].

Для визначення коефіцієнтів вимушеної складової необхідно підставити цю функцію (наприклад, $j_{\text{вим}}(t) = c$) в рівняння динаміки і отримати з нього рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів.

Коефіцієнти вільної складової рішення $j_{\text{вил}}(t)$ визначають з урахуванням частинного рішення (визначених коефіцієнтів). Для визначення констант інтегрування c_i необхідно підставити початкові умови в рішення диференціального рівняння (1.3) і в похідні від нього. При цьому, якщо

порядок рівняння динаміки дорівнює n , то і число констант інтегрування і число заданих початкових умов теж дорівнює n . Для визначення констант інтегрування слід знайти $n-1$ похідних від рішення диференціального рівняння динаміки. Далі слід підставити початкові умови в рішення диференціального рівняння (1.3) і в похідні від нього і отримати систему рівнянь, з якої визначити невідомі константи інтегрування.

З урахуванням знайдених констант інтегрування залежність (1.3) і буде шуканим рішенням рівняння руху системи. Отримане рівняння перехідного процесу є найбільш повною динамічною характеристикою системи.

З розглянутого вище витікає наступна послідовність рішення лінійного диференціального рівняння:

- визначення коренів характеристичного рівняння і відшукування загального рішення (вільної складової);
- відшукування частинного рішення (вимушеної складової);
- визначення коефіцієнтів вимушеної складової;
- визначення констант інтегрування вільної складової шляхом вирішення системи рівнянь, що отримана при підстановці початкових умови в рішення диференціального рівняння і в похідні від нього;
- отримання рівняння перехідного процесу шляхом підстановки знайдених коефіцієнтів в загальне рішення диференціального рівняння (1.3).

Приклад 1.1. Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$$2\varphi'' + 8\varphi' + 6\varphi = 9.1\mu$$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинок $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $j(0) = 0$; $j'(0) = 0$.

Для побудови перехідної характеристики слід розв'язати рівняння динаміки. Застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь.

Рішення диференціального рівняння будемо шукати у вигляді:

$$j(t) = j_{\text{віль}}(t) + j_{\text{виму}}(t),$$

де $j_{\text{віль}}(t)$ – вільна складова рішення; $j_{\text{виму}}(t)$ – вимушена складова рішення.

Для визначення виду вільної складової рішення знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$2p^2 + 8p + 6 = 0.$$

В результаті рішення квадратного рівняння отримали корені:

$p_1 = -1$, $p_2 = -3$. Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні та різні, то вільну складову запишемо у вигляді:

$$j_{\text{віль}}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}.$$

Вид вимушеної складової рішення визначається видом впливу на вході в систему. Оскільки на вхід системи подається одинична сходишка $\mu(t) = 1(t)$, тобто $m(t) = 1$ – константа, то і вимушена складова шукається у вигляді константи – $j_{\text{виму}}(t) = c_3$.

Тоді вид перехідної характеристики (одинична сходишка на вході і нульові початкові умови) буде:

$$j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти: c_1 , c_2 , c_3 . Спочатку визначимо вимушену складову c_3 . Для визначення коефіцієнтів вимушеної складової необхідно підставити цю функцію $j_{\text{виму}}(t) = c_3$ в диференціальне рівняння і з урахуванням величини впливу на вході $m(t) = 1$, і тоді отримаємо:

$$6j_{\text{виму}}(t) = 9.1 \cdot m(t) = 9.1 \cdot 1 = 9.1. \text{ Звідки } j_{\text{виму}}(t) = 9.1/8 = 1.517. \text{ Тоді } c_3 = 1.517.$$

З урахуванням знайденого c_3 вид часової характеристики буде:

$$j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + 1.517.$$

Для визначення констант інтегрування вільної складової c_1 і c_2 необхідно отримати систему двох рівнянь. Для цього продиференціюємо рішення $j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + 1.517$ і отримаємо:

$$j'(t) = -1 \cdot c_1 e^{-t} - 3 \cdot c_2 e^{-3t}.$$

Далі підставимо початкові умови в рішення диференціального рівняння і в першу похідну від нього:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 1.517 &= 0 \\ -c_1 - 3c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Розв'язавши отриману систему відносно c_1 і c_2 , отримаємо:

$$c_1 = -2.27; c_2 = 0.758.$$

Підставивши значення констант інтегрування в загальний розв'язок, отримаємо аналітичний вираз перехідної характеристики:

$$j(t) = 1.517 - 2.275e^{-t} + 0.758e^{-3t}.$$

Побудувати графік перехідної характеристики (часової характеристики) можна за допомогою математичних пакетів. Нижче (рис. 1.6) показана перехідна характеристика, що отримана за рівнянням $j(t) = 1.517 - 2.275e^{-t} + 0.758e^{-3t}$ в середовищі Excel.

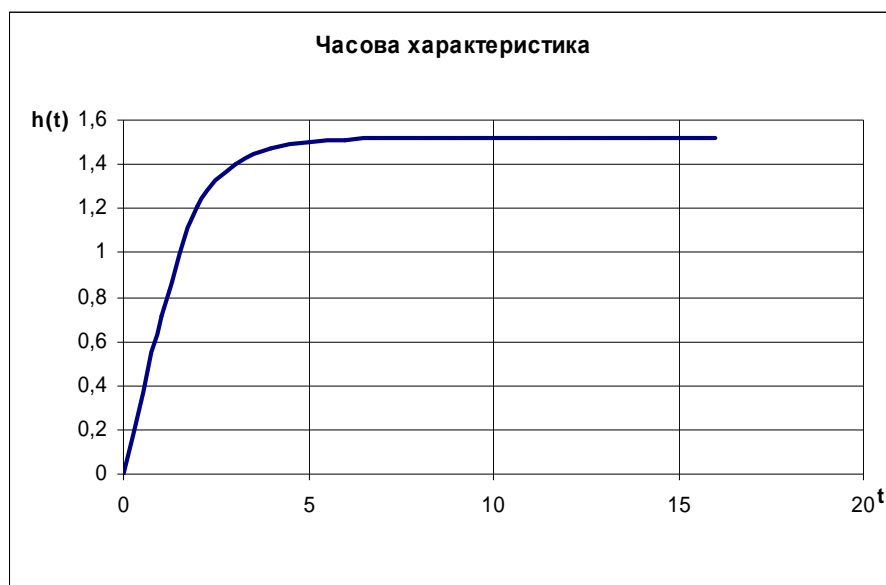


Рис. 1.6 Перехідна характеристика

Використання функцій математичного пакета Mathcad при вирішенні диференціального рівняння класичним методом

Приклади рішення диференціальних рівнянь (з дійсними та різними, дійсними та кратними, а також комплексними коренями характеристичного рівняння) в середовищі Mathcad наведені в Додатку Б.

Пошук коренів характеристичного рівняння зручно виконувати за допомогою математичного пакету Mathcad.

Можна використовувати функцію Mathcad *polyroots*. Функція *polyroots* не потребує начального наближення і повертає відразу всі корені, як дійсні, так і комплексні.

Формат:

Polyroots(v)

Повертає корені поліному степені n . Коефіцієнти поліному знаходяться в векторі v довжини $n + 1$. Повертає вектор довжини n , що складається з коренів полінома.

де v - вектор, що складається з коефіцієнтів полінома.

Приклад використання функції *polyroots* для характеристичного рівняння

$$2.3p^3 + 3.8p^2 + 5.1p + 2.8 = 0.$$

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$f(p) := 2.3 \cdot p^3 + 3.8 \cdot p^2 + 5.1 \cdot p + 2.8$$

$$v := \begin{pmatrix} 2.8 \\ 5.1 \\ 3.8 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.793 \\ -0.43 + 1.162i \\ -0.43 - 1.162i \end{pmatrix}$$

Аналогічний результат можна отримати і за допомогою функції *solve*, що знаходиться на панелі інструментів **Символьніе**.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$2.3 \cdot p^3 + 3.8 \cdot p^2 + 5.1 \cdot p + 2.8 \text{ solve, } p \rightarrow \begin{pmatrix} -0.79252176150263081918 \\ -0.42982607577042372085 + 1.1624748648968480429i \\ -0.42982607577042372085 - 1.1624748648968480429i \end{pmatrix}$$

В додатку Б наведені листинги Mathcad, де корені характеристичного рівняння знаходять за допомогою директиви Given і функції Find. Це теж дуже зручний варіант рішення. Там же показано приклад застосування цих функцій для рішення систем, що потрібно для визначення констант інтегрування.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання визначити вид перехідної характеристики, що відповідає заданому рівнянню динаміки.
2. Визначити константи інтегрування.
3. Використовуючи отримане рівняння, побудувати шукану перехідну характеристику (наприклад, з використанням MS Excel).
4. Запрограмувати рішення заданого рівняння динаміки в середовищі Mathcad.
5. Продемонструвати розрахунки, побудови і роботу програми викладачу.
6. Оформити протокол лабораторної роботи.

Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до задалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додається роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

- лістинг програми з результатами розрахунків;
- розрахунки та побудови у середовищі MS Excel.

Контрольні запитання

1. Типовий вплив одинична сходинка (графічне представлення і математичний опис).
2. Типовий вплив одиничний імпульс (графічне представлення і математичний опис).
3. Зв'язок між одиничним імпульсом і одиничною сходинкою.
4. Типовий вплив лінійно зростаючий вхідний вплив (графічне представлення і математичний опис).
5. Зв'язок між лінійно зростаючим вхідним впливом і одиничною сходинкою.
6. Типовий вплив гармонічний вхідний сигнал (графічне представлення і математичний опис).
7. Реакція динамічної системи на різні види типових (стандартних) впливів.
8. Вільна складова рішення диференціального рівняння і її фізичний сенс.
9. Вимушена складова рішення диференціального рівняння і її фізичний сенс.
10. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при різних дійсних коренях характеристичного рівняння.
11. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при кратних дійсних коренях характеристичного рівняння.
12. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при комплексних коренях характеристичного рівняння.
13. Визначення невідомих коефіцієнтів вільної складової рішення диференціального рівняння.
14. Визначення невідомих коефіцієнтів вимушеної складової рішення диференціального рівняння.

Лабораторна робота № 2

Застосування операційного числення при визначенні часових характеристик

Мета та основні завдання: Дослідити процес отримання часової характеристики системи автоматичного керування при відомому математичному описі її динаміки. Набути вмінь рішення диференціальних рівнянь з використанням операторного методу.

Завдання¹. Вивчити пряме і зворотне перетворення по Лапласу. Розглянути поняття оригінала і зображення функції, використання таблиці відповідностей для переходу з одного класу функцій в іншій. Вивчити зображення за Лапласом похідних. Розглянути застосування операторного методу для рішень рівнянь динаміки.

Короткі теоретичні відомості

Перетворення Лапласа

Аналітичне рішення диференціальних рівнянь, що описують динаміку системи, особливо високого порядку, зазвичай пов'язане з певними математичними труднощами. Для полегшення таких задач використовують спеціальні перетворення (наприклад, Лапласа). Операція перетворення диференціального рівняння полягає в переході від функції з незалежною змінною t (час) до функції з комплексною змінною p ($p=\alpha+j\omega$). При цьому у диференціальних рівняннях динаміки здійснюється заміна реальних змінних і їхніх похідних відповідними зображеннями, що дає можливість замінити операцію диференціювання (інтегрування) більш простою операцією множення (ділення) і перейти від диференціальних рівнянь до алгебраїчних.

Операторна форма запису диференціальних рівнянь широко використовується в теорії автоматичного регулювання, оскільки окрім спрощення обчислювальних операцій, дозволяє також виконувати легкий

¹ Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

перехід з часової області в частотну і навпаки. Це є важливою обставиною, тому що частотні методи лежать в основі багатьох інженерних розрахунків автоматичних систем. Сучасний математичний апарат операційного числення дозволяє вирішувати задачі, що описуються багатьма видами диференціальних рівнянь і деякими типами інтегральних рівнянь.

Пряме перетворення Лапласа – це перехід від функції з дійсною змінною t до функції комплексної змінної p . Цей перехід здійснюється за допомогою інтеграла Лапласа:

$$L[f(t)] = \int_0^t f(t) \cdot e^{-pt} dt = \bar{f}(p), \quad (2.1)$$

де $f(t)$ – оригінал функції; $\bar{f}(p)$ – зображення функції; L – оператор Лапласа. При цьому функція $f(t)$ має бути неперервною або кусочно-неперервною функцією від t і на функцію $f(t)$ накладається наступна умова:

$$f(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Символічний запис цієї операції має вигляд:

$$\bar{f}(p) = L[f(t)]. \quad (2.2)$$

Перехід від зображення до оригіналу називають зворотнім перетворенням за Лапласом і виконують за формулою:

$$L^{-1}[\bar{f}(p)] = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \bar{f}(p) \cdot e^{pt} dp = f(t), \quad (2.3)$$

де c – абсциса збіжності функції $\bar{f}(p)$; L^{-1} – зворотній оператор Лапласа.

Абсциса збіжності визначається з наступних умов:

- існують такі додатні числа M і c , які не залежать від t і, при цьому, виконується наступна нерівність $|f(t)| < Me^{ct}$ для усіх $0 \leq t \leq \infty$;
- абсцису збіжності c визначає мінімальне значення c , при якому виконується ця нерівність.

Знаходження інтеграла (2.3) зазвичай викликає великі труднощі.

Символічний запис цієї операції має вигляд:

$$f(t) = L^{-1}[\bar{f}(p)]. \quad (2.4)$$

Основні властивості перетворення Лапласа

Властивість лінійності перетворень

Сума оригіналів відповідає сумі їх зображень. Для любых констант a і b :

$$L[a \cdot f(t) + b \cdot y(t)] = a \cdot L[f(t)] + b \cdot L[y(t)] = a \cdot \bar{f}(p) + b \cdot \bar{y}(p).$$

В загальному вигляді: сумі оригіналів $\sum_{i=1}^n a_i \cdot f_i(t)$ відповідає сума зображень $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \bar{f}_i(p)$.

Зсув в дійсній області

Зсуву на час τ в області оригіналу відповідає множення зображення на $e^{-p\tau}$: $L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} \cdot \bar{f}(p)$.

Зсув в комплексній області

Зсув аргументу зображення на a відповідає множенню оригінала на e^{at} :

$$L[f(t) \cdot e^{at}] = \bar{f}(p-a).$$

Зміна масштабу

Діленню дійсної змінної t в оригіналі на a відповідає множення, як самого зображення так і комплексної змінної p , на число a :

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a \cdot \bar{f}(a \cdot p),$$

а множенню дійсної змінної t в оригіналі на a

відповідає ділення, як самого зображення так і комплексної змінної p , на число a :

$$L[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot \bar{f}\left(\frac{1}{a} \cdot p\right).$$

Інтегрування оригіналу при нульових початкових умовах

Інтегруванню оригінала відповідає ділення його зображення на p :

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{\bar{f}(p)}{p}.$$

Кінцеве і початкове значення оригіналу

Значення, що приймаються оригіналом в нулі і в нескінченності, відповідно визначаються значеннями зображення (помноженого на p) в нескінченності і нулі.

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \bar{f}(p).$$

$$2. \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \bar{f}(p).$$

Диференціювання оригінала при нульових початкових умовах

Диференціюванню оригінала відповідає множення його зображення на p :

$$L[f'(t)] = p \cdot \bar{f}(p). \text{ В загальному випадку: } L[f^{(n)}(t)] = p^n \cdot \bar{f}(p).$$

Диференціювання оригінала при не нульових початкових умовах

При не нульових початкових умовах зображення похідних від оригіналу знаходять за формулами:

$$\text{перша похідна: } L[f'(t)] = p \cdot \bar{f}(p) - f_0;$$

$$\text{друга похідна: } L[f''(t)] = p^2 \cdot \bar{f}(p) - pf_0 - f'_0;$$

$$\text{похідна } m \text{ порядку: } L[f^{(m)}(t)] = p^m \cdot \bar{f}(p) - \sum_{i=0}^{m-1} p^i \cdot f_0^{(m-i-1)}.$$

Зображення типових функцій

Нехай задана функція є константою $f(t) = c$. Знайдемо зображення за Лапласом цієї функції:

$$L[c] = \int_0^t c e^{-pt} dt = c \cdot \int_0^t e^{-pt} dt = -\frac{c}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty = \frac{c}{p}.$$

$$\text{Тоді } L[c] = \frac{c}{p}.$$

По аналогії можна знайти зображення від одиничної сходинок $f(t) = 1(t) = 1$. Воно становитиме: $L[1] = \frac{1}{p}$.

Знайдемо зображення за Лапласом функції $f(t) = e^{-at}$:

$$L[e^{-at}] = \int_0^t e^{-at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^t e^{-(p+a)t} dt = -\frac{1}{p+a} e^{-(p+a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p+a}.$$

$$\text{Отже } L[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}.$$

По аналогії можна знайти зображення функції $f(t) = e^{at}$: $L[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$.

Знайдемо зображення за Лапласом від функції $f(t) = t$:

$$L[t] = \int_0^t t \cdot e^{-pt} dt.$$

Інтеграл візьмемо по частинах. Уведемо позначення:

$$u = t; \quad du = dt,$$

$$dv = e^{-pt} dt; \quad v = -\frac{1}{p} e^{-pt}.$$

$$\text{Тоді } L[t] = \int_0^t t \cdot e^{-pt} dt = -\frac{t}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^t e^{-pt} dt$$

При підстановці меж інтегрування у перший доданок отримаємо нуль.

Розглянемо другий доданок, який був визначений вище:

$$L[t] = \frac{1}{p} \int_0^t e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \left(-\frac{1}{p}\right) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p^2}.$$

$$\text{Отже } L[t] = \frac{1}{p^2}.$$

По аналогії можна знайти зображення функції $f(t) = t^2$: $L[t] = \frac{2!}{p^2}$ і функції

$$f(t) = t^n: \quad L[t] = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Таким чином, можна отримати зображення функцій, що найчастіше зустрічаються в практиці дослідження систем автоматичного регулювання. Для таких функцій складені таблиці відповідності між оригіналами і зображеннями. Зображення деяких функцій, що досить часто зустрічаються в теорії управління, приведені в таблиці. 2.1. Якщо ж потрібна функція відсутня в таблиці, то її зображення можна знайти за формулою прямого перетворення Лапласа (2.1).

Таблиця 2.1 Зображення основних функцій за Лапласом

№	оригінал $f(t)$	зображення $\bar{f}(p)$	№	оригінал $f(t)$	зображення $\bar{f}(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	13	$\sin(wt)$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$
2	c	$\frac{c}{p}$	14	$\cos(wt)$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	15	$t \sin(wt)$	$\frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}$
4	t^2	$\frac{2!}{p^3}$	16	$t \cos(wt)$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$
5	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	17	$e^{-bt} \sin(wt)$	$\frac{w}{(p+b)^2 + w^2}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	18	$e^{bt} \sin(wt)$	$\frac{w}{(p-b)^2 + w^2}$
7	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	19	$e^{-bt} \cos(wt)$	$\frac{p+b}{(p+b)^2 + w^2}$
8	$\frac{A_R \cdot t^{R-1}}{(R-1)!} e^{p_1 t}$	$\frac{A_R}{(p-p_1)^R}$	20	$e^{bt} \cos(wt)$	$\frac{p-b}{(p-b)^2 + w^2}$
9	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	21	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
10	$t^2 \cdot e^{-at}$	$\frac{2!}{(p+a)^3}$	22	$ch(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
11	$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	23	$1(t-t)$	$\frac{1}{p} e^{-pt}$
12	$d(t)$	1			

Рішення рівнянь динаміки з використанням операторного методу

Важливим застосуванням операційного числення з використанням перетворення Лапласа є рішення лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами, якими і описуються динаміка системи автоматичного керування.

Вирішення диференціального рівняння в цьому випадку складається з наступних етапів:

1. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми.
2. Рішення операторного рівняння відносно вихідної величини в області комплексної змінної p ,

3. Перехід в область дійсного змінного шляхом зворотного перетворення Лапласа (з використанням таблиці відповідності).

Нехай диференціальне рівняння має вид:

$$\begin{aligned} a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = \\ = b_m m^{(m)}(t) + b_{m-1} m^{(m-1)}(t) + \dots + b_2 m''(t) + b_1 m'(t) + b_0 m(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $j(t)$ – вихідний параметр; $m(t)$ – вхідний параметр, $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – коефіцієнти рівняння динаміки.

Зазвичай приймаються нульові початкові умови.

$$j(0) = 0; j'(0) = 0; j''(0) = 0; \dots; j^{(n-1)}(0) = 0. \quad (2.6)$$

Виконаємо перетворення диференціального рівняння за Лапласом (отримаємо рівняння в операторній формі):

$$\begin{aligned} a_n p^n \bar{j}(p) + a_{n-1} p^{n-1} \bar{j}(p) + \dots + a_2 p^2 \bar{j}(p) + a_1 p \bar{j}(p) + a_0 \bar{j}(p) = \\ = b_m p^m \bar{m}(p) + b_{m-1} p^{m-1} \bar{m}(p) + \dots + b_2 p^2 \bar{m}(p) + b_1 p \bar{m}(p) + b_0 \bar{m}(p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

виконаємо найпростіші перетворення:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \bar{j}(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0) \bar{m}(p) \end{aligned}$$

Вирішимо отримане рівняння в операторній формі, що є алгебраїчним, відносно вихідної змінної:

$$\bar{j}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \bar{m}(p). \quad (2.7)$$

При отриманні перехідної характеристики вхідний вплив є одиничною сходячкою $f(t) = 1(t)$, зображення якої $L[1(t)] = \frac{1}{p}$.

З урахуванням $\bar{m}(p) = \frac{1}{p}$ рівняння (2.7) можна записати:

$$\bar{j}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \cdot \frac{1}{p}. \quad (2.8)$$

Перехідну функцію $\varphi(t)$ можна отримати за допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$j(t) = L^{-1} \left[\frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_2 p^2 + b_1 p b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \cdot \frac{1}{p} \right] \quad (2.9)$$

Зворотне перетворення за Лапласом складного виразу (2.9), який відсутній у таблиці відповідностей операторного методу, потребує використання методів спрощення виразу шляхом представлення правої його частини у вигляді суми простих доданків. Ці перетворення потребують досить значних витрат часу. Розглянемо їх.

Нехай зображення вихідної величини має вигляд:

$$\bar{J} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{N(p)}{pM(p)}, \quad (2.10)$$

де $M(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \dots + a_2 p^2 + a_1 p + 1$,

$N(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \dots + b_2 p^2 + b_1 p + 1$ – поліноми. При чому $m < n$ і коефіцієнти a_i, b_i – дійсні числа.

Знайдемо корені характеристичного рівняння – $M(p)=0$ (знаменник в рівнянні (2.10)): p_1, p_2, \dots, p_n .

Запишемо

$$M(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + 1 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)$$

При цьому можливі наступні випадки.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні різні.

Для виконання зворотного перетворення за Лапласом вираз (2.10) представимо у вигляді:

$$\frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{N(p)}{p a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_i}{p - p_i} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n},$$

де A_0, A_1, \dots, A_n – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Кожен з цих доданків (зображення) згідно таблиці відповідностей операторного методу легко перетворюється до оригіналу:

$$L^{-1}\left[\frac{A_0}{p}\right] = A_0, \quad L^{-1}\left[\frac{A_1}{p-p_1}\right] = A_1 e^{p_1 t}, \dots, L^{-1}\left[\frac{A_i}{p-p_i}\right] = A_i e^{p_i t}.$$

Для визначення коефіцієнтів A_0, A_1, \dots, A_n виконується почергове множення рівняння (2.11):

$$\frac{N(p)}{p a_n (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_i}{p-p_i} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} \quad (2.11)$$

на знаменники правої частини (наприклад, на $(p-p_1)$) з наступним визначенням отриманого рівняння при $p = p_1$.

Тоді:

$$\frac{N(p)}{p a_n (p-p_2)\dots(p-p_n)} = \frac{A_0(p-p_1)}{p} + A_1 + \frac{A_2(p-p_1)}{p-p_2} + \dots + \frac{A_i(p-p_1)}{p-p_i} + \dots + \frac{A_n(p-p_1)}{p-p_n}$$

Звідси при $p = p_1$:

$$A_1 = \frac{N(p_1)}{p_1 a_n (p_1 - p_2) \dots (p_1 - p_n)}.$$

Аналогічно знаходимо A_i при $p = p_i$:

$$A_i = \frac{N(p_i)}{p_i a_n (p_i - p_1) \dots (p_i - p_{i-1})(p_i - p_{i+1}) \dots (p_i - p_n)}.$$

Для визначення коефіцієнта A_0 виконується множення рівняння (2.11) на p , а потім рішення рівняння при $p = 0$:

$$A_0 = \frac{N(p)}{a_n (p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)} \text{ при } (p=0).$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні рівні (кратні).

Нехай характеристичне рівняння має R кратних коренів $p = p_1$. Тоді права частина матиме вигляд:

$$\frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_R}{(p-p_1)^R} + \frac{A_{R-1}}{(p-p_1)^{R-1}} + \dots + \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \frac{A_1}{(p-p_1)^1} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}$$

Кожен з доданків (зображення) згідно таблиці відповідностей операторного методу легко перетворюється до оригіналу:

$$L^{-1}\left[\frac{A_0}{p}\right] = A_0, \quad L^{-1}\left[\frac{A_R}{(p-p_1)^R}\right] = \frac{A_R \cdot t^{R-1}}{(R-1)!} e^{p_1 t}, \dots, L^{-1}\left[\frac{A_n}{p-p_n}\right] = A_n e^{p_n t}.$$

Знаходження A_0, A_R, A_n виконується розглянутим вище способом. Для визначення інших коефіцієнтів необхідно вираз з найбільш високим степенем знаменника перенести вліво, привести до загального знаменника та скоротити загальні множники чисельника і знаменника. Після цього звичайним способом визначається черговий коефіцієнт. І так за аналогією, доки не буде визначено коефіцієнт A_1 .

3. Корені характеристичного рівняння комплексні спряжені.

При комплексних спряжених коренях характеристичного рівняння зворотне перетворення за Лапласом виконується аналогічно описаному вище способу. При цьому, корені і коефіцієнти будуть комплексними спряженими числами. З урахуванням цього і при застосуванні формули Ейлера:

$$e^{(a \pm jw)t} = e^a (\cos wt \pm j \sin wt) \text{ будуть отримані дійсні вирази.}$$

Приклад 2.1. Визначити перехідну характеристику системи автоматичного керування, яка описується наступним диференціальним рівнянням:

$$2j'' + 10j' + 8j = 7m$$

при подачі на її вхід одиничної сходи при нульових початкових умовах:

$$j(0) = 0; j'(0) = 0.$$

Виконаємо перетворення диференціального рівняння за Лапласом:

$$2p^2 \bar{j}(p) + 10p \bar{j}(p) + 8 \bar{j}(p) = 7 \bar{m}(p).$$

Тоді $(2p^2 + 10p + 8)\bar{j}(p) = 7\bar{m}(p)$.

Вирішимо отримане рівняння в операторній формі відносно вихідної змінної:

$$\bar{j} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{7}{(2p^2 + 10p + 8)} \bar{m} \text{ і при вхідному впливі у вигляді одиничної}$$

сходінки $\bar{m} = 1/p$, отримаємо:

$$\bar{j} = \frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{7}{p(2p^2 + 10p + 8)}. \text{ Для рішення застосуємо операторний метод.}$$

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^2 + 10p + 8 = 0$ і знайдемо його корені:

$p_1 = -1$; $p_2 = -4$. Тоді:

$$\bar{j} = \frac{7}{p(2p^2 + 10p + 8)} = \frac{7}{2p(p+1)(p+4)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p+1} + \frac{A_2}{p+4}.$$

Знайдемо коефіцієнти A_0, A_1, A_2 згідно методики, описаної вище:

$$A_0 = \frac{7}{2(p+1)(p+4)} \text{ при } p = 0. \text{ Звідси } A_0 = 0,875.$$

$$A_1 = \frac{7}{2p(p+4)} \text{ при } p = -1. \text{ Звідси } A_1 = -1,167.$$

$$A_2 = \frac{7}{2p(p+1)} \text{ при } p = -4. \text{ Звідси } A_2 = 0,292.$$

Зображення вихідної величини матиме вигляд:

$$\bar{j} = \frac{0,875}{p} - \frac{1,167}{p+1} + \frac{0,292}{p+4}.$$

Виконавши зворотнє перетворення за Лапласом, отримаємо перехідну характеристику:

$$j(t) = 0,875 - 1,167 \cdot e^{-t} + 0,292 \cdot e^{-4t}.$$

Побудувати графік перехідної характеристики можна за допомогою математичних пакетів. Нижче (рис. 2.1) показана перехідна характеристика, що отримана за рівнянням $j(t) = 0,875 - 1,167 \cdot e^{-t} + 0,292 \cdot e^{-4t}$ в середовищі Excel.



Рис. 2.1 Перехідна характеристика

Перетворення диференціального рівняння за Лапласом при не нульових початкових умовах

Цей варіант перетворення диференціального рівняння до операторної форми розглянемо на прикладі диференціального рівняння другого порядку виду: $a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + j(t) = km(t)$.

Початкові умови: $j(0) = j_0; j'(0) = j'_0$.

При не нульових початкових умовах зображення похідних від оригіналу знаходять за формулами:

- перша похідна: $L[f'(t)] = p \cdot \bar{f}(p) - f_0$;
- друга похідна: $L[f''(t)] = p^2 \cdot \bar{f}(p) - pf_0 - f'_0$.

Виконаємо перетворення по Лапласу з урахуванням цих формул:

$$a_2 [p^2 \bar{j}(p) - pj_0 - j'_0] + a_1 [p \bar{j}(p) - j_0] + \bar{j}(p) = k \bar{m}(p).$$

Тоді $(a_2 p^2 + a_1 p + 1) \bar{j}(p) = k \bar{m}(p) + [(a_2 p + a_1) j_0 + a_2 j'_0]$.

Вирішимо отримане рівняння в операторній формі відносно вихідної змінної:

$$\bar{j}(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \bar{m}(p) + \frac{(a_2 p + a_1) j_0 + a_2 j_0'}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}.$$

Нехай вхідний вплив є одиничною сходиною $f(t) = 1(t)$, зображення якої $\bar{m}(p) = \frac{1}{p}$. Нехай також корені характеристичного рівняння дійсні різні.

Для характеристичного рівняння $a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ отримані корені дійсні різні від'ємні: $p_1 < 0$ і $p_2 < 0$ (а значення цих коренів α_1 і α_2). З урахуванням цього можна записати:

$$\bar{j}(p) = \frac{k}{a_2(p + a_1)(p + a_2)} \cdot \frac{1}{p} + \frac{(a_2 p + a_1) j_0 + a_2 j_0'}{a_2(p + a_1)(p + a_2)}.$$

Для виконання зворотного перетворення за Лапласом вираз представимо у вигляді:

$$\bar{j}(p) = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p + a_1} + \frac{A_2}{p + a_2} + \frac{B_1}{p + a_1} + \frac{B_2}{p + a_2}.$$

Коефіцієнти A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 визначаються згідно методики, що описана вище. При наявності інших коренів характеристичного рівняння алгоритм дій аналогічний.

Використання формули Хевісайда для рішення рівнянь динаміки

Формула є зведеним до формульного вигляду операторним методом рішення динамічних залежностей, зведених до передавальних функцій $W(p)$ виду:

$$W(p) = \frac{\bar{J}}{\bar{m}} = \frac{N(p)}{M(p)}. \quad (2.12)$$

де $N(p)$ і $M(p)$ – чисельник і знаменник передавальної функції, що мають вид поліному.

Нехай на вхід системи подається вплив у вигляді одиничної сходинок ($m(t) = 1(t)$), що має зображення за Лапласом: $\bar{m} = 1/p$. Тоді

$$\bar{J} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{N(p)}{pM(p)}. \quad (2.13)$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння системи $M(p)=0$ (знаменник передавальної функції): p_1, p_2, \dots, p_n .

Для виконання зворотного перетворення за Лапласом вираз (2.13) представимо у вигляді:

$$\bar{J} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_i}{p-p_i} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n}, \quad (2.14)$$

де A_0, A_1, \dots, A_n – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Помножимо ліву і праву частини рівняння (2.14) на p :

$$A_0 + \frac{A_1 p}{p-p_1} + \frac{A_2 p}{p-p_2} + \dots + \frac{A_i p}{p-p_i} + \dots + \frac{A_n p}{p-p_n} = \frac{N(p)}{M(p)} \quad (2.15)$$

і отримаємо

$$A_0 = \frac{N(0)}{M(0)}. \quad (2.16)$$

Для визначення A_i помножимо ліву і праву частини рівняння (2.14) на $(p-p_i)$ і отримаємо:

$$\frac{A_0(p-p_i)}{p} + \frac{A_1(p-p_i)}{p-p_1} + \frac{A_2(p-p_i)}{p-p_2} + \dots + A_i + \dots + \frac{A_n(p-p_i)}{p-p_n} = \frac{N(p)(p-p_i)}{pM(p)}. \quad (2.17)$$

При $p=p_i$ з рівняння (2.17) знайдемо A_i :

$$A_i = \frac{N(p)(p-p_i)}{pM(p)} \text{ при } (p=p_i). \quad (2.18)$$

При розгляді рівняння (2.18) при $p=p_i$ в його правій частині отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ (оскільки многочлен $M(p)$ має корінь p_i , і відповідно множник $(p-p_i)$). Використаємо для розкриття цієї невизначеності правило Лопітала. Для чого знайдемо похідні за змінною p чисельника і знаменника:

$$A_i = \frac{N(p) + N'(p)(p - p_i)}{pM'(p) + M(p)} \Big|_{p=p_i} = \frac{N(p_i)}{p_i M'(p_i)}. \quad (2.19)$$

Знайшовши таким чином всі A_1, \dots, A_n коефіцієнти, запишемо вираз (2.14):

$$\bar{j} = \frac{N(0)}{pM(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{p_i M'(p_i)} \cdot \frac{1}{p - p_i}. \quad (2.20)$$

Виконаємо зворотнє перетворення за Лапласом виразу (2.20):

$$j(t) = \frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{p_i M'(p_i)} \cdot e^{p_i t}. \quad (2.21)$$

Таким чином, формула Хевісайда для впливу у вигляді одиничної сходинок має вигляд (2.21).

Якщо вплив у вигляді сходинок не є одиничним ($m(t) = m(t)$), то формула Хевісайда набуде вигляду:

$$j(t) = m(t) \cdot \left[\frac{N(0)}{M(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{p_i M'(p_i)} \cdot e^{p_i t} \right]. \quad (2.22)$$

Примітка. Формула Хевісайда не застосовується при **кратних** (рівних) і нульових коренях характеристичного рівняння.

Приклад 2.2. Визначити перехідну характеристику системи автоматичного керування, яка описується наступним диференціальним рівнянням:

$$j'' + 6j' + 8j = 4m' + 24m$$

при подачі на її вхід одиничної сходинок при нульових початкових умовах:

$$j(0) = 0; j'(0) = 0.$$

Виконаємо перетворення диференціального рівняння за Лапласом:

$$p^2 \bar{j}(p) + 6p \bar{j}(p) + 8 \bar{j}(p) = 4p \bar{m}(p) + 24 \bar{m}(p).$$

Тоді $(p^2 + 6p + 8)\bar{j}(p) = (4p + 24)\bar{m}(p)$.

Вирішимо отримане рівняння в операторній формі відносно вихідної змінної:

$$\bar{j} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{4(p+6)}{(p^2 + 6p + 8)} \bar{m} \text{ і при вхідному впливі у вигляді одиничної}$$

сходінки $\bar{m} = 1/p$, отримаємо:

$$\bar{j} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{4(p+6)}{p(p^2 + 6p + 8)}.$$

Для рішення застосуємо формулу Хевісайда.

Запишемо характеристичне рівняння: $p^2 + 6p + 8 = 0$ і знайдемо його корені: $p_1 = -2$; $p_2 = -4$.

Визначимо параметри, необхідні для підстановки у формулу Хевісайда:

$$N(p) = 4p + 24; N(0) = 24; N(p_1) = 16; N(p_2) = 8;$$

$$M(p) = p^2 + 6p + 8; M(0) = 8;$$

$$M'(p) = 2p + 6; M'(p_1) = 2; M'(p_2) = -2.$$

Підставимо отримані значення в формулу (2.20):

$$\bar{j} = \frac{24}{p \cdot 8} + \frac{16}{(-2) \cdot 2} \cdot \frac{1}{p+2} + \frac{8}{(-4) \cdot (-2)} \cdot \frac{1}{p+4} = \frac{3}{p} - \frac{4}{p+2} + \frac{1}{p+4}.$$

Виконавши зворотнє перетворення за Лапласом, отримаємо перехідну характеристику:

$j(t) = 3 - 4 \cdot e^{-2t} + e^{-4t}$. (Отримані параметри можна було одразу підставити в формулу (2.21) і отримати перехідну характеристику без її зображення).

Нижче (рис. 2.2) показана перехідна характеристика, що отримана за рівнянням $j(t) = 3 - 4 \cdot e^{-2t} + e^{-4t}$ у середовищі Excel.

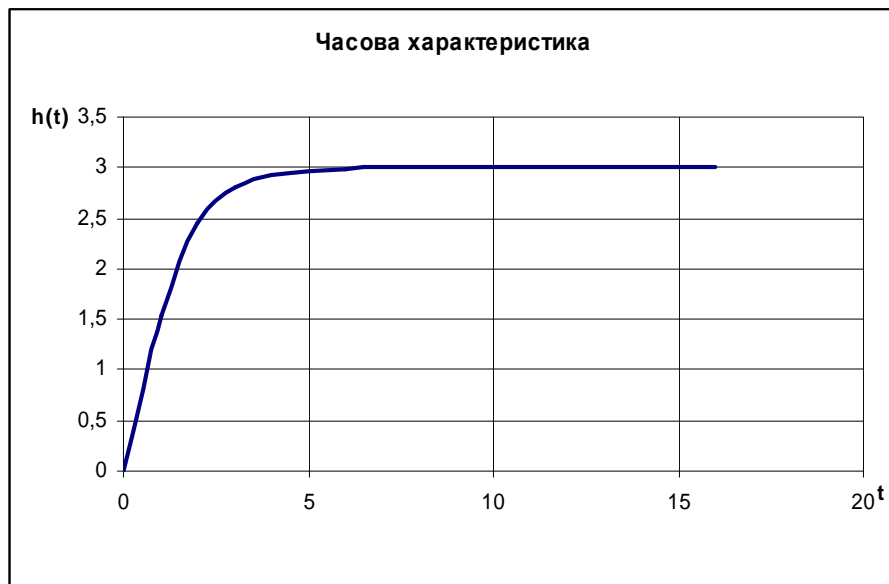


Рис. 2.2. Перехідна характеристика

Приклад 2.3. Визначити перехідну характеристику системи автоматичного керування, яка описується наступним диференціальним рівнянням:

$$j'' + 2j' + 2j = 2m' + 4m$$

при подачі на її вхід одиничної сходинок при нульових початкових умовах:

$$j(0) = 0; j'(0) = 0.$$

Виконаємо перетворення диференціального рівняння за Лапласом:

$$p^2 \bar{j}(p) + 2p \bar{j}(p) + 2 \bar{j}(p) = 2p \bar{m}(p) + 4 \bar{m}(p).$$

Тоді $(p^2 + 2p + 2) \bar{j}(p) = (2p + 4) \bar{m}(p)$.

Вирішимо отримане рівняння в операторній формі відносно вихідної змінної:

$$\bar{j} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{2(p+2)}{(p^2 + 2p + 2)} \bar{m} \text{ і при вхідному впливі у вигляді одиничної}$$

сходинок $\bar{m} = 1/p$, отримаємо:

$$\bar{j} = \frac{N(p)}{M(p)} \bar{m} = \frac{2(p+2)}{p(p^2+2p+2)}.$$

Для рішення застосуємо формулу Хевісайда.

Запишемо характеристичне рівняння: $p^2 + 2p + 2 = 0$ і знайдемо його корені: $p_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm j$. Визначимо коефіцієнти, необхідні для підстановки у формулу Хевісайда:

$$A_0 = \frac{N(0)}{M(0)} = \frac{8}{2} = 4;$$

$$A_1 = \frac{N(p_1)}{p_1 M'(p_1)} = \frac{2p+8}{p(2p+2)} (p = -1+j) = \frac{2(-1+j)+8}{(-1+j)[2(-1+j)+2]} = -2+j;$$

$$A_2 = \frac{N(p_2)}{p_2 M'(p_2)} = \frac{2p+8}{p(2p+2)} (p = -1-j) = \frac{2(-1-j)+8}{(-1-j)[2(-1-j)+2]} = -2-j.$$

Підставимо отримані значення в формулу (2.21) і отримаємо перехідну характеристику:

$$j(t) = 4 + (-2+j) \cdot e^{(-1+j)t} + (-2-j) e^{(-1-j)t}$$

Виконаємо необхідні перетворення, щоб позбавитись від комплексних чисел:

$$\begin{aligned} j(t) &= 4 + (-2+j) \cdot e^{(-1+j)t} + (-2-j) e^{(-1-j)t} = 4 + e^{-t} [(-2+j) \cdot e^{jt} + (-2-j) e^{-jt}] = \\ &= 4 + e^{-t} [(-2+j) \cdot (\cos t + j \sin t) + (-2-j) \cdot (\cos t - j \sin t)] = 4 + e^{-t} [-4 \cos t - 2 \sin t] \end{aligned}$$

У результаті перехідна характеристика має вигляд:

$$j(t) = 4 - 4e^{-t} (\cos t + 0,5 \cdot \sin t).$$

Нижче (рис. 2.3) показана перехідна характеристика, що отримана за рівнянням $j(t) = 4 - 4e^{-t} (\cos t + 0,5 \cdot \sin t)$ у середовищі Excel.



Рис. 2.3. Перехідна характеристика

Використання функцій математичного пакета Mathcad при вирішенні диференціального рівняння операторним методом

Пряме перетворення Лапласа здійснюється за допомогою функції **laplace**, а зворотне – функцією **invlaplace**. Ці функції знаходяться на панелі інструментів **Символьные**.

Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному пакеті Mathcad розглянуто в лабораторній роботі 1.

В Mathcad є спеціальний символічний оператор **convert**, **parfrac**, що призначений для розкладання на елементарні дроби виразу, що зазвичай представляє собою відношення поліномів. Уводиться він натисканням кнопки **parfrac** на панелі інструментів **Символьные**. В лівому маркері слід прописати вираз, що підлягає розкладанню, а в правому – змінну, виходячи з якої повинно проводитись розкладання.

Застосування цього оператору дає можливість суттєво спростити процедуру визначення коефіцієнтів розкладання виразу зображення вихідної величини при представленні його у вигляді суми простих дробів.

Приклад 2.4. Виконаємо розкладання на елементарні дроби виразу вихідної величини, що наведений в прикладі 2.1:

$$\bar{J} = \frac{7}{p(2p^2 + 10p + 8)} = \frac{7}{2p(p+1)(p+4)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{(p+1)} + \frac{A_2}{(p+4)}, \text{ де потім визначали}$$

коефіцієнти A_0, A_1, A_2 . Знайдені коефіцієнти мали значення: $A_0 = 0,875$; $A_1 = -1,167$; $A_2 = 0,292$.

Виконаємо цю процедуру в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$\frac{7}{2 \cdot p \cdot (p + 1) \cdot (p + 4)} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{7}{8 \cdot p} - \frac{7}{6 \cdot (p + 1)} + \frac{7}{24 \cdot (p + 4)}$$

Як видно з лістингу, результати розрахунку ті ж самі: $7/8 = 0,875$; $-7/6 = -1,167$; $7/24 = 0,292$.

Такий же результат дають розрахунки в Mathcad без визначення коренів характеристичного рівняння:

$$\frac{7}{p \cdot (2 \cdot p^2 + 10 \cdot p + 8)} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{7}{8 \cdot p} - \frac{7}{6 \cdot (p + 1)} + \frac{7}{24 \cdot (p + 4)}$$

При використанні функції **invlaplace** для зворотнього перетворення за Лапласом при отриманні аналітичного виразу перехідного процесу краще зворотне перетворення виконувати після представлення виразу вихідної величини у вигляді суми простих дробів. Це дозволить Mathcad представити результат в оптимальній формі.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$\left[\frac{7}{8 \cdot p} - \frac{7}{6 \cdot (p + 1)} + \frac{7}{24 \cdot (p + 4)} \right] \text{ invlaplace, p} \rightarrow \frac{7 \cdot e^{-4 \cdot t}}{24} - \frac{7 \cdot e^{-t}}{6} + \frac{7}{8}$$

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати перетворення за Лапласом заданого рівняння динаміки.
2. Отримати зображення вихідної величини.
3. Виконати необхідні перетворення зображення для переходу до функції часу.
4. Визначити вид перехідної характеристики, яка відповідає заданому рівнянню динаміки.
5. Використовуючи отримане рівняння, побудувати шукану перехідну характеристику (наприклад, з використанням MS Excel).
6. Запрограмувати рішення заданого рівняння динаміки в середовищі Mathcad.
7. Продемонструвати розрахунки, побудови і роботу програми викладачу.
8. Оформити протокол лабораторної роботи.

Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до задалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додається роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

- лістинг програми з результатами розрахунків;
- розрахунки та побудови у середовищі MS Excel.

Контрольні запитання

1. Зображення за Лапласом одиничної сходинки.
2. Зображення за Лапласом одиничного імпульсу.
3. Як виглядає зображення за Лапласом вхідного ступінчатого впливу, якщо $m(t) = 0,5(t)$?
4. Зображення за Лапласом похідних при нульових початкових умовах.
5. Зображення за Лапласом похідних при не нульових початкових умовах.
6. Зображення за Лапласом при запізненні (зсуві на час τ) в області оригіналу.
7. Етапи вирішення диференціального рівняння операторним методом.
8. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми при нульових початкових умовах.
9. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми при не нульових початкових умовах.
10. Сене таблиці відповідності між оригіналами і зображеннями.
11. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння дійсні рівні, при представленні його у вигляді суми простих дробів?
12. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні, при представленні його у вигляді суми простих дробів?
13. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені, при представленні його у вигляді суми простих дробів?
14. В якому вигляді знаходять рішення рівнянь динаміки при використанні формули Хевісайда?
15. При яких коренях характеристичного рівняння формула Хевісайда не застосовується?
16. Який вид має перехідний процес, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?
17. Який вид має перехідний процес, якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені?

Лабораторна робота № 3

Часові характеристики типових ланок САР

Мета та основні завдання: Дослідити процес перетворення сигналу типовими ланками систем автоматичного керування. Набути вмінь отримання часових характеристик типових ланок систем автоматичного керування.

Завдання¹. Для типових ланок САР вивчити: їх математичний опис, фізичний сенс коефіцієнтів рівнянь ланок, часові характеристики ланок.

Короткі теоретичні відомості

Динамічні властивості типових ланок САР та їх характеристики

Функціональні елементи, що використовуються в САР, можуть мати досить різне конструктивне виконання і різні принципи дії. У задачах аналізу і синтезу різних автоматичних систем найчастіше використовується розбиття на окремі динамічні ланки. Під динамічною ланкою розуміють пристрій будь-якого фізичного виду і конструкції, що описується певними диференціальними рівняннями. Одні й ті ж рівняння можуть описувати дуже різноманітні пристрої. Дійсно, з погляду динамічних властивостей термopар, резервуар, електричний RC ланцюг, регулюючий клапан є однаковими, оскільки описуються ідентичними диференціальними рівняннями. Класифікація ланок автоматичних систем проводиться саме за видом диференціального рівняння.

Типовою динамічною ланкою називається частина системи автоматичного керування, яка описується лінійним диференціальним рівнянням не вище другого порядку. Типова ланка має один вхід x і один вихід y (рис.3.1). Рівняння ланки зв'язує її вхідний і вихідний параметри. При цьому мається на увазі, що ланка є елементом направленої дії, тобто

¹ Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

зміна вхідного параметра викликає появу вихідного сигналу, але при цьому зворотний вплив відсутній.



Рис 3.1. Типова (елементарна) динамічна ланка

При цьому кожній ланці відповідає математична залежність між вхідною та вихідною величинами, яка є достатньо простою, і тому типові ланки часто називають елементарними.

Будь-яка система автоматичного регулювання з точки зору динамічних процесів, що протікають в ній, може бути представлена як сукупність взаємодіючих елементарних динамічних систем. Розділення систем регулювання на ланки суттєво спрощує їх розрахунок і конструювання. Замінюючи реальний елемент САР одною ланкою або певною комбінацією типових ланок, отримують динамічну модель САР, диференціальні рівняння якої будуть відомі або можуть бути отримані.

Знання властивостей типових ланок полегшує дослідження складних систем автоматичного регулювання, динамічні властивості яких визначаються складними диференціальними рівняннями високих порядків.

Типовими ланками лінійних САР є: безінерційна, аперіодична, коливальна, інтегруюча, диференціююча ланки, ланка чистого запізнювання. Розглянемо їх. При цьому будемо вважати, що на вхід ланки подається одинична сходи́нка $x(t) = 1(t)$ і початкові умови є нульовими.

Безінерційна (підсилювальна) ланка

Безінерційну ланку називають також підсилювальною або пропорційною. Рівняння ланки має вигляд:

$$y = k \cdot x, \quad (3.1)$$

де: k – коефіцієнт передачі.

При $x(t) = 1(t)$ маємо $y(t) = k \cdot 1(t)$ ($h(t) = k \cdot 1(t)$ – перехідна характеристика). Ця ланка миттєво відображує вхідну величину на виході. При цьому амплітуда вихідного сигналу змінюється k в разів. Перехідна характеристика $h(t) = k \cdot 1(t)$ безінерційної ланки наведена на рис. 3.2.

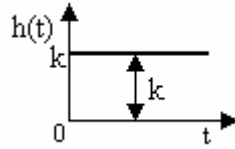


Рис 3.2. Перехідна характеристика безінерційної (підсилювальної) динамічної ланки

Інтегруюча ланка (ідеальна)

Рівняння ланки має вигляд:

$$y' = \varepsilon \cdot x, \quad (3.2)$$

де ε – коефіцієнт передачі.

Часто рівняння ланки записують наступним чином:

$$y(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t x(t) dt \quad \text{або} \quad T_i y'(t) = x(t) \quad \text{при} \quad y(0) = 0. \quad \text{Величину } T_i \text{ називають}$$

постійною часу ланки.

Перехідну характеристику визначають підстановкою вхідного сигналу $x(t) = 1(t)$ в рівняння ланки (3.2):

$$h(t) = \varepsilon \int_0^t x(t) dt = \varepsilon \int_0^t dt = \varepsilon t. \quad (3.3)$$

Вихідний сигнал інтегруючої ланки пропорційний інтегралу за часом від вхідного сигналу. Графік перехідної характеристики інтегруючої ланки наведений на рис. 3.3.

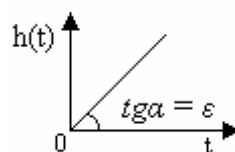


Рис 3.3. Перехідна характеристика інтегруючої динамічної ланки

Аперіодична ланка першого порядку

Аперіодична ланка першого порядку називається також інерційною. Вона описується диференціальним рівнянням першого порядку виду:

$$Ty' + y = kx, \quad (3.4)$$

де T – постійна часу, яка визначає інерційність ланки; k – коефіцієнт передачі.

Часова характеристика аперіодичної ланки знаходиться як сума загального та частинного розв'язків рівняння (3.3): $y(t) = y_{\text{віль}}(t) + y_{\text{виму}}(t)$.

При цьому, вільна складова рішення становить $y_{\text{віль}}(t) = c_1 e^{p_1 t}$, де p_1 – корінь характеристичного рівняння $Tp + 1 = 0$ ($p_1 = -\frac{1}{T}$), а вимушена складова рішення становить $y_{\text{виму}}(t) = c$.

Тоді $y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c$. При одиничній сходиці $x(t) = 1(t)$ на вході і нульових початкових умовах отримаємо: $c = k$, а $c_1 = -k$. Перехідна характеристика аперіодичної ланки матиме вигляд:

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (3.5)$$

Графік перехідної характеристики аперіодичної ланки першого порядку наведений на рис. 3.4.

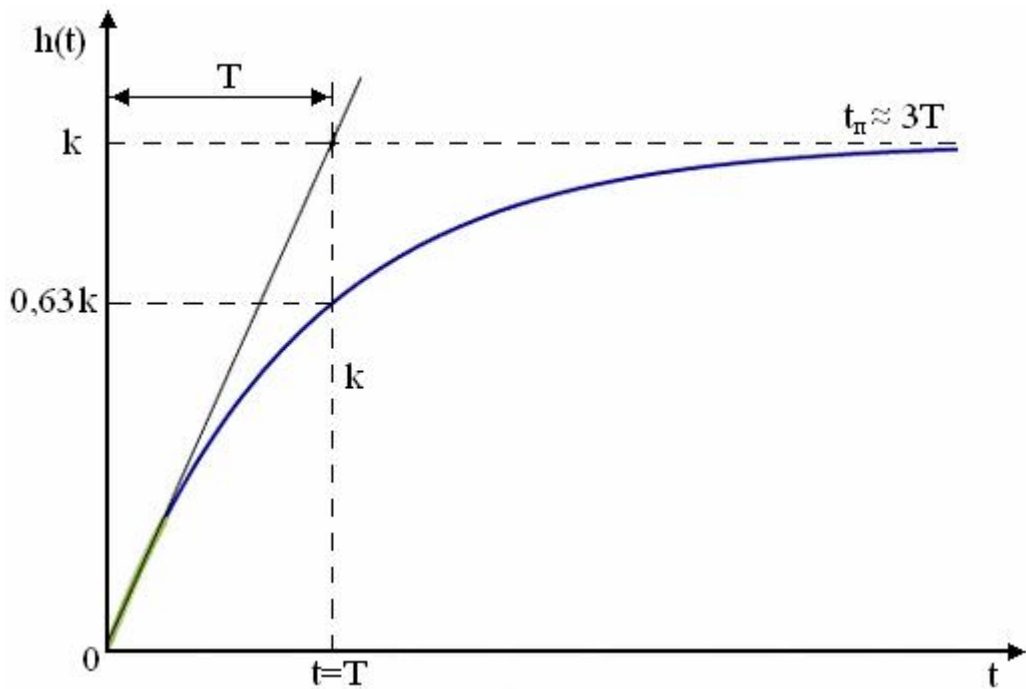


Рис 3.4. Перехідна характеристика аперіодичної ланки першого порядку

Перехідні характеристики аперіодичної ланки (рис.3.4) дають можливість оцінити постійну часу T (слід провести дотичну до перехідної характеристики в нульовій точці, як показано на рисунку, до перетину її з асимптотою), приблизний час перехідного процесу $t_{\pi} \approx 3T$ (на практиці зазвичай вважають, що перехідний процес закінчився за час $3T$) і коефіцієнт передачі k . Постійну часу можна визначити і за такою характеристикою (для аперіодичної ланки першого порядку) – це час, за який вихідна величина досягла 0,63 від свого сталого значення: тобто $h(T) = 0,63[h(\infty) - h(0)]$.

Диференціувальна ланка (ідеальна)

Рівняння ідеальної диференціувальної ланки має вигляд:

$$y = kx', \quad (3.6)$$

де k – коефіцієнт передачі.

Зміна вихідного сигналу диференціувальної ланки пропорційна швидкості зміни вхідного сигналу.

Перехідна характеристика ідеальної диференціувальної ланки має вигляд:

$$h(t) = k \cdot [1(t)]' = kd(t), \quad (3.7)$$

тобто являє собою імпульсну функцію (δ – функцію) з площею, що дорівнює k .

Графік перехідної характеристики ідеальної диференціовальної ланки наведений на рис. 3.5.

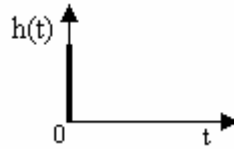


Рис 3.5. Перехідна характеристика ідеальної диференціовальної ланки

Реальна диференціовальна ланка

Ця ланка реагує на швидкість зміни вхідного сигналу. Рівняння реальної диференціовальної ланки має вигляд:

$$Ty' + y = kTx', \quad (3.8)$$

де T – постійна часу; k – коефіцієнт передачі.

З метою отримання часової характеристики ланки застосуємо операторний метод і виконаємо пряме перетворення за Лапласом рівняння (3.8):

$(Tp + 1)\bar{y} = kTp\bar{x}$. При одиничній сходинці $x(t) = 1(t)$ на вході отримаємо:

$$\bar{y} = \frac{kTp}{Tp + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{p + \frac{1}{T}}.$$

З урахуванням отриманого часова характеристика реальної диференціовальної ланки матиме вигляд:

$$h(t) = ke^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.9)$$

Графік перехідної характеристики реальної диференціовальної ланки наведений на рис. 3.6.

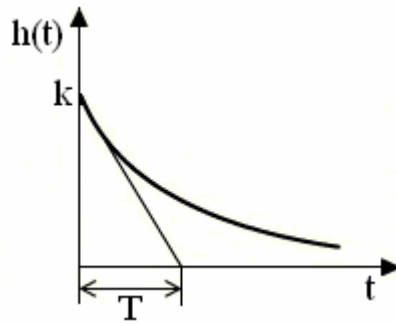


Рис 3.6. Перехідна характеристика реальної диференціовальної ланки

Інтегро-диференціовальна ланка

Рівняння інтегро-диференціовальної ланки має вигляд:

$$T_2 y' + y = k(T_1 x' + x), \quad (3.10)$$

де T_1, T_2 – постійні часу; k – коефіцієнт передачі.

Ланку ще називають інтегро-форсуючою ланкою.

Важливим параметром ланки є коефіцієнт $\alpha = \frac{T_1}{T_2}$. Якщо $\alpha < 1$, то ланка за

своїми властивостями наближається до інтегруючої та інерційної ланок, а якщо $\alpha > 1$, то ланка за своїми властивостями близька до диференціовальної ланки. Для отримання перехідної характеристики ланки застосуємо операторний метод і виконаємо пряме перетворення рівняння (3.10). Зображення за Лапласом перехідної характеристики матиме вигляд:

$(T_2 p + 1)\bar{y} = k(T_1 p + 1)\bar{x}$. При одиничній сходінці $x(t) = 1(t)$ на вході отримаємо:

$$\bar{y} = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1} \cdot \frac{1}{p}.$$

Знайдемо корінь характеристичного рівняння $T_2 p + 1 = 0$ ($p_1 = -\frac{1}{T_2}$).

Тоді виконаємо розкладення виразу на прості складові:

$$\frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p + 1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p(p + \frac{1}{T_2})} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p + \frac{1}{T_2}}.$$

З урахуванням методики, що описана в лабораторній роботі №2, знайдемо коефіцієнти A_0 та A_1 .

$$A_0 = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2(p + \frac{1}{T_2})} \Big|_{p=0} = k.$$

$$A_1 = \frac{k(T_1 p + 1)}{T_2 p} \Big|_{p=-\frac{1}{T_2}} = \frac{k(-\frac{T_1}{T_2} + 1)}{(-1)} = -k(\frac{T_2 - T_1}{T_2}).$$

Підставимо знайдені коефіцієнти і виконаємо зворотне перетворення за Лапласом. Отримана перехідна характеристика інтегро-диференціовальної ланки матиме вигляд:

$$h(t) = k - k(\frac{T_2 - T_1}{T_2})e^{-\frac{t}{T_2}} = k(1 - \frac{T_2 - T_1}{T_2})e^{-\frac{t}{T_2}}. \quad (3.11)$$

Графік перехідної характеристики інтегро-диференціовальної ланки наведений на рис. 3.7.

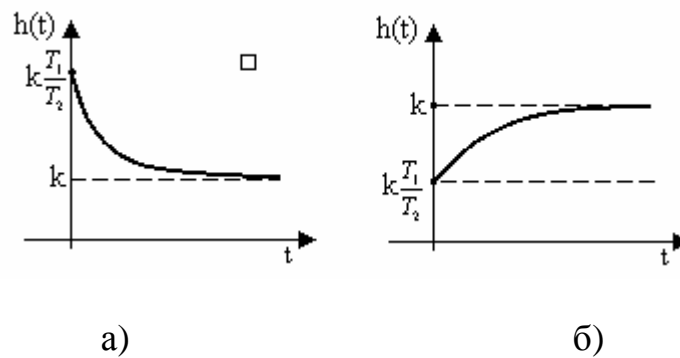


Рис 3.7. Перехідна характеристика реальної диференціовальної ланки

а) $T_1 > T_2$; б) $T_1 < T_2$.

Ланки другого порядку

Диференціальне рівняння, що описує ланки другого порядку, має вигляд:

$$a_2 y'' + a_1 y' + y = kx, \quad (3.12)$$

де a_1, a_2 – коефіцієнти; k – коефіцієнт передачі.

В залежності від коренів характеристичного рівняння

$a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ розрізняють:

1. Аперіодичну (інерційну) ланку другого порядку, коли $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$.
2. Коливальну ланку другого порядку, коли $a_1^2 - 4a_2 < 0$.
3. Консервативну ланку, коли $a_1 = 0$ (її можна розглядати як окремий випадок коливної ланки).

Аперіодична ланка другого порядку

Аперіодична ланка другого порядку описується рівнянням (3.12) при умові, що $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$. Ця умова вказує на те, що корені характеристичного рівняння $a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ будуть дійсні. Коли $p_1 \neq p_2$, то корені дійсні різні. Для отримання перехідної характеристики ланки застосуємо операторний метод і виконаємо пряме перетворення рівняння (3.12) при одиничній сходиці $x(t) = 1(t)$ на вході і нульових початкових умовах. В результаті отримаємо:

$$\bar{y} = \frac{k}{(a_2 p^2 + a_1 p + 1)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{a_2 p(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} \quad (3.13)$$

Знайдемо коефіцієнти A_0, A_1, A_2 згідно з методикою, описаною вище:

$$A_0 = \frac{k}{a_2(p - p_1)(p - p_2)} \text{ при } p = 0. \text{ Звідси } A_0 = k.$$

$$A_1 = \frac{k}{a_2 p(p - p_2)} \text{ при } p = p_1. \text{ Звідси } A_1 = \frac{k}{a_2 p_1(p_1 - p_2)}.$$

$$A_2 = \frac{k}{a_2 p(p - p_1)} \text{ при } p = p_2. \text{ Звідси } A_2 = \frac{k}{a_2 p_2(p_2 - p_1)}.$$

Зображенню (3.13) вихідної величини при отриманих коефіцієнтах буде відповідати оригінал (перехідна характеристика аперіодичної ланки другого порядку):

$$h(t) = k + \frac{k}{a_2 p_1(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} + \frac{k}{a_2 p_2(p_2 - p_1)} e^{p_2 t}. \quad (3.14)$$

Графік перехідної характеристики аперіодичної ланки другого порядку при від'ємних коренях характеристичного рівняння наведений на рис. 3.8.

Часто рівняння ланки другого порядку записують у вигляді [9, 10, 16]:

$$T_1 T_2 y'' + (T_1 + T_2) y' + y = kx; \quad (3.15)$$

$$T_2^2 y'' + T_1 y' + y = kx; \quad (3.16)$$

$$T_2^2 y'' + 2x T_2 y' + y = kx \quad (x = T_1 / 2T_2), \quad (3.17)$$

де T_1, T_2 – постійні часу; k – коефіцієнт передачі; ξ – коефіцієнт демпфування. При цьому, якщо $x \geq 1$, то ланка аперіодична; якщо $0 < x < 1$, то ланка коливальна; якщо $x = 0$, то ланка консервативна.

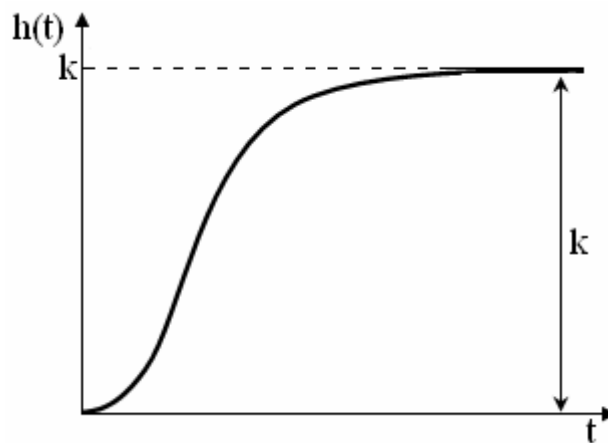


Рис 3.8. Перехідна характеристика аперіодичної ланки другого порядку

Перехідні характеристики аперіодичної ланки (рис.3.9), що задана у вигляді (3.16), дають можливість оцінити постійні часу T_1, T_2 (слід провести дотичну до часової характеристики в точці перегину А, як показано на рисунку 3.9, до перетину її з асимптотою і віссю абсцис).

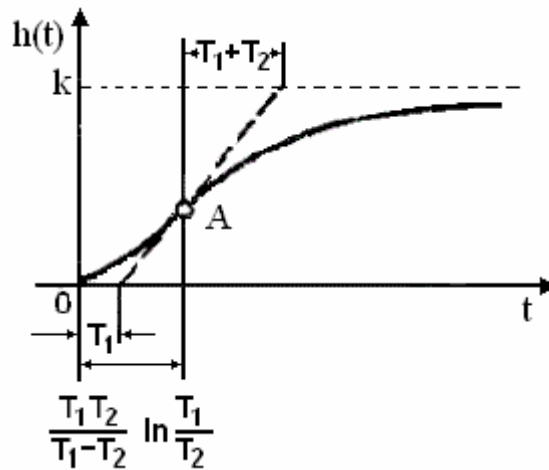


Рис 3.9. До визначення постійних часу аперіодичної ланки другого порядку

Слід розглянути випадок, коли корені характеристичного рівняння $a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ будуть дійсні, але рівні $p_1 = p_2$. Тоді

$$a_2 p^2 + a_1 p + 1 = a_2 (p - p_1)^2.$$

Для отримання перехідної характеристики ланки застосуємо операторний метод і виконаємо пряме перетворення рівняння (3.12) при одиничній сходиці $x(t) = 1(t)$ на вході і нульових початкових умовах. В результаті отримаємо:

$$\bar{y} = \frac{k}{(a_2 p^2 + a_1 p + 1)} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k}{a_2 p (p - p_1)^2} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{(p - p_1)^2} + \frac{A_2}{(p - p_1)}. \quad (3.18)$$

Знайдемо коефіцієнти A_0 , A_1 , A_2 згідно з методикою описаною вище відповідно до кратних коренів характеристичного рівняння:

$$A_0 = \frac{k}{a_2 (p - p_1)^2} = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \text{ при } p = 0. \text{ Звідси } A_0 = k.$$

$$A_1 = \frac{k}{a_2 p} \text{ при } p = p_1. \text{ Звідси } A_1 = \frac{k}{a_2 p_1}.$$

При наявності кратних коренів характеристичного рівняння слід перенести останній доданок з щойно визначеним A_1 в ліву частину рівняння (3.18):

$$\frac{k}{a_2 p(p-p_1)^2} - \frac{A_1}{(p-p_1)^2} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_2}{(p-p_1)} \text{ і підставити визначене } A_1.$$

$$\frac{k}{a_2 p(p-p_1)^2} - \frac{k}{a_2 p_1(p-p_1)^2} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_2}{(p-p_1)}.$$

Далі ліва частина приводиться до спільного знаменника:

$$\frac{k(p_1-p)}{a_2 p p_1 (p-p_1)^2} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_2}{(p-p_1)} \text{ і виконується скорочення чисельника і}$$

знаменника на $(p-p_1)$ в лівій частині. Тоді

$$\frac{-k}{a_2 p p_1 (p-p_1)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_2}{(p-p_1)}.$$

Наступний коефіцієнт A_2 визначається звичайним чином:

$$A_2 = \frac{-k}{a_2 p p_1} \text{ при } p = p_1. \text{ Звідси } A_2 = \frac{-k}{a_2 p_1^2}.$$

Знайдемо оригінал у вигляді: $h(t) = A_0 + (A_2 + A_1 t)e^{p_1 t}$. Після підстановки отриманих значень коефіцієнтів A_0 , A_1 , A_2 можна побудувати графік перехідної характеристики аперіодичної ланки другого порядку при кратних коренях характеристичного рівняння, який буде аналогічний графіку, наведеному на рис.3.8.

Коливальна ланка другого порядку

Коливальна ланка другого порядку описується рівнянням (3.12) при умові, що $a_1^2 - 4a_2 < 0$. Ця умова вказує на те, що корені характеристичного рівняння $a_2 p^2 + a_1 p + 1 = 0$ будуть комплексними спряженими $p_{1,2} = a \pm jw$.

Перехідна характеристика аперіодичної ланки знаходиться як сума загального та частинного розв'язків рівняння (3.12): $y(t) = y_{\text{віль}}(t) + y_{\text{виму}}(t)$.

При цьому, вільна складова рішення становить

$y_{\text{віль}}(t) = c_1 e^{at} \sin wt + c_2 e^{at} \cos wt$, а вимушена складова рішення становить

$y_{\text{виму}}(t) = c$. Тоді $y(t) = c + c_1 e^{at} \sin wt + c_2 e^{at} \cos wt$.

Спочатку визначимо вимушену складову c . Для визначення коефіцієнтів вимушеної складової необхідно підставити цю функцію $y_{вум}(t) = c$ в диференціальне рівняння і з урахуванням величини впливу на вході $m(t) = 1$. Отримаємо: $y_{вум}(t) = k \cdot m(t) = k \cdot 1 = k$.

З урахуванням цього $y(t) = k + c_1 e^{at} \sin wt + c_2 e^{at} \cos wt$.

Для визначення констант інтегрування вільної складової c_1 і c_2 необхідно отримати систему двох рівнянь. Для цього продиференціюємо рішення $y(t) = k + c_1 e^{at} \sin wt + c_2 e^{at} \cos wt$ і отримаємо:

$$y'(t) = c_1 a e^{at} \sin wt + c_1 w e^{at} \cos wt + c_2 a e^{at} \cos wt - c_2 w e^{at} \sin wt.$$

Далі підставимо початкові умови в рішення диференціального рівняння в першу похідну від нього і при $t = 0$ отримаємо:

$$\begin{cases} k + c_2 = 0 \\ wc_1 + c_2 a = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши отриману систему відносно c_1 і c_2 , отримаємо: $c_2 = -k; c_1 = k \frac{a}{w}$.

Перехідна характеристика коливальної ланки матиме вигляд:

$$h(t) = y(t) = k \left[1 + \left(\frac{a}{w} \sin wt - \cos wt \right) \cdot e^{at} \right]. \quad (3.19)$$

Графік перехідної характеристики коливальної ланки при $a < 0$ наведений на рис. 3.10.

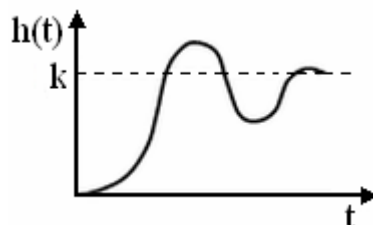


Рис 3.10. Перехідна характеристика коливальної ланки

Консервативна ланка

Консервативна ланка має диференціальне рівняння виду:

$$a_2 y'' + y = kx.$$

Вона є частинним випадком коливальної ланки, коли характеристичне рівняння має уявні корені $p_{1,2} = \pm jw$. Тоді рівняння (3.19) набуває вигляду:

$$h(t) = k(1 - \cos wt). \quad (3.20)$$

Це і буде перехідна характеристика консервативної ланки.

Графік перехідної характеристики консервативної ланки наведений на рис. 3.11.

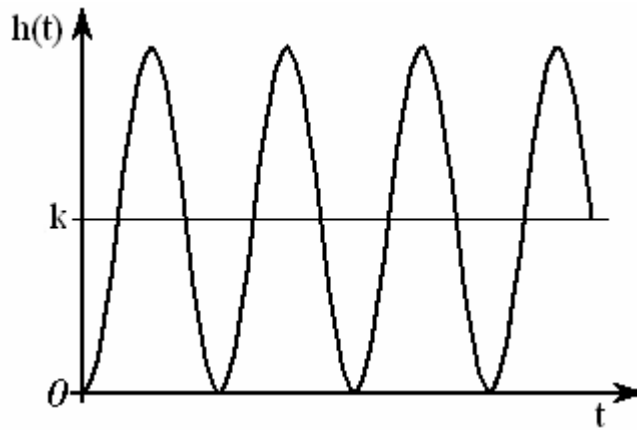


Рис 3.11. Перехідна характеристика консервативної ланки

В цій ланці відсутнє розсіювання енергії і її перехідна характеристика являє собою незатухаючі коливання з амплітудою k і частотою $w = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$.

Ланка чистого (транспортного) запізнювання

Ланка чистого запізнювання описується рівнянням:

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (3.21)$$

де τ – час чистого запізнювання.

Вона виконує затримку сигналу на час τ , але не змінює його форми й величини.

Графік перехідної характеристики ланки чистого запізнювання наведений на рис. 3.12.

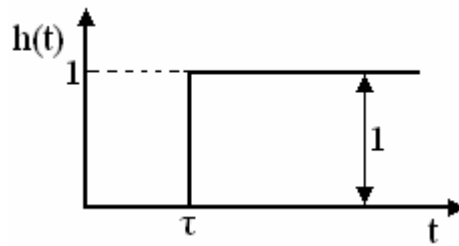


Рис 3.12 перехідна характеристика ланки чистого запізнювання

Всі розглянуті вище елементарні ланки відносять до мінімально-фазових. Окрім основних ланок, що були розглянуті, і які мають першочергове значення в курсі теорії автоматичного керування, розглядають й інші ланки [9, 10, 16]:

- форсуючу ланку, яка описується рівнянням $y = k(Tx' + x)$ і може бути утворена при паралельному з'єднанні підсилювальної та ідеальної диференціювальної ланок;

- форсуючу ланку другого порядку, яка описується рівнянням $y = k(T_1x'' + T_2x' + x)$;

- ідеальну диференціювальну ланку n -го порядку $y = kx^{(n)}$;

- ідеальну інтегруючу ланку n -го порядку $y^{(n)} = e \cdot x$,

а також немінімально-фазові ланки.

Примітка. Всі функції **математичного пакету Mathcad**, необхідні для виконання цієї лабораторної роботи, розглянуті вище (див. лабораторні роботи №1 і №2).

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання отримати перехідні характеристики заданих типових ланок із заданими коефіцієнтами.
2. Використовуючи отримані рівняння, побудувати шукані перехідні характеристики (наприклад, з використанням MS Excel).
3. Для ланки, яка позначена позначкою (Є), виконати дослідження впливу коефіцієнтів рівняння ланки на характер перехідного процесу. Виконати побудову перехідних характеристик ланки при різних коефіцієнтах рівняння ланки (при фіксованому значенні одного з коефіцієнтів виконати розрахунки для 3-4 значень іншого й навпаки).
4. Запрограмувати рішення рівнянь динаміки ланок в середовищі Mathcad.
5. Продемонструвати розрахунки, побудови і роботу програми викладачу.
6. Оформити протокол лабораторної роботи.

Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до заздалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додається роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

- лістинг програми з результатами розрахунків;
- розрахунки та побудови у середовищі MS Excel (Mathcad).

Контрольні запитання

1. Яку ланку називають типовою(елементарною)?
2. Властивості аперіодичних ланок першого і другого порядків.

3. Властивості диференціальних ланок.
4. Властивості підсилювальної ланки.
5. Властивості інтегровальних ланок.
6. Властивості ланки чистого запізнення.
7. Властивості коливальної і консервативної ланок.
8. Які ланки належать до ланок другого порядку?
9. Як за графіком перехідної характеристики аперіодичної ланки першого порядку знайти її параметри?
10. Як за графіком перехідної характеристики аперіодичної ланки другого порядку знайти її параметри?
11. Як за графіком перехідної характеристики реальної диференціальної ланки знайти її параметри?
12. Коли інтегро-диференціальна ланка за своїми властивостями наближається до диференціальної ланки?
13. Яку амплітуду мають незатухаючі коливання консервативної ланки?
14. Чим відрізняються перехідні характеристики аперіодичних ланок першого і другого порядків?

Лабораторна робота № 4

Визначення стійкості САР

Мета та основні завдання: Дослідити процес визначення стійкості системи автоматичного керування за допомогою алгебраїчних критеріїв стійкості. Набути вмінь визначення стійкості САР з використанням наступних критеріїв стійкості: кореневого критерію і критерію Гурвиця.

Завдання¹. Вивчити поняття стійкості САР. Розглянути поняття: стійкої і нестійкої систем; системи, що знаходиться на межі стійкості. Вивчити оцінку стійкості САР за допомогою коренів характеристичного рівняння системи, а також з використанням алгебраїчного критерію стійкості Гурвиця. Вивчити мнемонічне правило побудови визначника Гурвиця n -го порядку. Розглянути умови стійкості простих САР.

Короткі теоретичні відомості

Стійкість лінійних систем

Прийняття рішення щодо стійкості системи автоматичного керування є одним з найважливіших питань аналізу динамічних систем керування. Система автоматичного керування повинна стійко працювати при впливі на неї різноманітних завад, шумів і сторонніх впливів. Під стійкістю системи автоматичного керування розуміють здатність системи повертатися до сталого режиму після зникнення зовнішніх сил, які вивели її з такого стану.

Нехай досліджувана система знаходиться в усталеному стані (на її входи не подаються жодні впливи й змінні системи, що характеризують її стан не змінюються в часі). Подамо на вхід системи деяке обмежене збурення (збурення не повинно бути занадто великим, щоб система не була зруйнована і не повинно бути таким малим, щоб система не відчула його).

Під дією цього збурення стан системи починає змінюватись (система відреагувала на збурення). Збурення діє на систему протягом скінченного

¹ Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

проміжку часу і потім усувається (система стає вільною від збурення). При цьому, система може повести себе відповідно до одного з можливих випадків:

- система не може відновити попередній усталений режим після порушення його збуренням і буде віддалятися від нього все далі – це нестійка система (перехідний процес при цьому буде незбіжним);
- система повернеться через деякий час у свій попередній усталений режим – це стійка система (перехідний процес при цьому буде збіжним);
- система прийде в усталений режим, який буде відрізнятися від попереднього, або отримає додатково до заданого руху ще і сталий періодичний рух, що являє собою незатухаючі коливання – цю систему вважають нейтральною, або такою, що знаходиться на межі стійкості (перехідний процес при цьому буде аперіодичним або коливальним незатухаючим).

Як в стійкій, так і в нестійкій системах перехідний процес може носити аперіодичний або коливальний характер.

Отже, вище розглянуто фізичний аспект стійкості, тобто здатність системи при відсутності збурень повертатись у свій попередній усталений режим. Розглянемо математичну сторону цієї проблеми. В математичному плані усталений режим – це нульові початкові умови, оскільки в усталеному режимі усі похідні за часом дорівнюють нулю, до того ж відлік змінних ведеться від цього ж таки усталеного режиму. Але в результаті дії збурення стан системи починає змінюватись, і на момент усунення збурення він буде відрізнятися від нульового (усталеного). Цей стан можна розглядати як початковий (починаючи з моменту усунення збурення). Ці початкові умови уже не будуть нульовими.

Проаналізуємо поведінку системи при не нульових початкових умовах $y(0) \neq 0$. За положенням рівноваги візьмемо сталий стан системи $y = y_{ст}$. Тоді:

– система (або рух системи відносно положення рівноваги $y_{cm} = 0$) називається стійкою, якщо з часом (при $t \rightarrow \infty$) вона повертається в стан рівноваги (рис. 4.1) тобто:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (4.1)$$

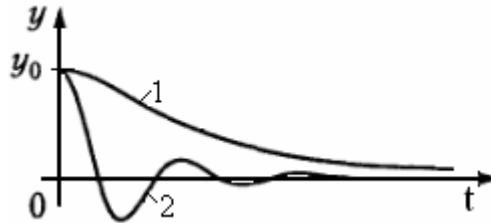


Рис. 4.1. Аперіодичний (1) і коливальний (2) перехідні процеси в стійкій системі

– система називається нейтрально стійкою, якщо для будь-яких значень $t > 0$ вона залишається в деякому околу положення рівноваги (рис. 4.2), тобто знайдеться таке число $\epsilon > 0$, що для любых значень $t > 0$ виконується умова:

$$|y(t)| < \epsilon. \quad (4.2)$$

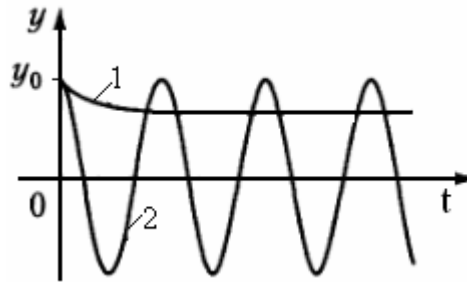


Рис. 4.2. Аперіодичний (1) і коливальний (2) перехідні процеси в нейтральній (нейтрально стійкій) системі

– система (або рух системи відносно положення рівноваги $y_{cm} = 0$) називається нестійкою, якщо з часом вона залишає лобий наперед заданий ϵ -оکیل положення рівноваги (рис. 4.3), тобто для любых $\epsilon > 0$ знайдеться таке $t_{cm} > 0$, що при $t > t_{cm}$ має місце:

$$|y(t)| > \epsilon. \quad (4.3)$$

Для більшості аперіодичних перехідних процесів нестійкий рух характеризується нескінченним зростанням модуля вихідної змінної, а для коливальних перехідних процесів – зростанням амплітуди.

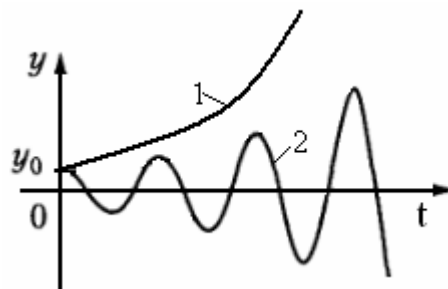


Рис. 4.3. Аперіодичний (1) і коливальний (2) перехідні процеси в нестійкій системі

Поняття стійкості наглядно ілюструється рис. 4.4. Положення кулі характеризується точкою A_0 . При відхиленні кулі від положення A_0 в положення A_1 під впливом зовнішніх сил куля наближається до положення рівноваги A_0 на рис. 4.4–а (стійка система), віддаляється від положення рівноваги A_0 на рис. 4.4–б (нестійка система) і займає нове положення рис. 4.4–в (нейтральна система).

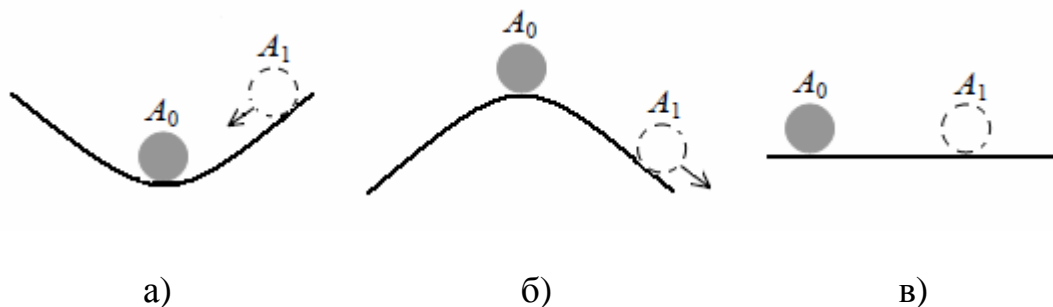


Рис. 4.4. До визначення стійкості: стійка система (а), нестійка система (б) і нейтральна система (в)

Кореневий критерій стійкості

Як було показано вище, в загальному випадку лінійна система описується диференціальним рівнянням виду:

$$\begin{aligned}
 a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = & \quad (4.4) \\
 = b_m m^{(m)}(t) + b_{m-1} m^{(m-1)} + \dots + b_2 m''(t) + b_1 m'(t) + b_0 m(t) & \quad ,
 \end{aligned}$$

де $j(t)$ – вихідний параметр; $m(t)$ – вхідний параметр, $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ – коефіцієнти.

Відповідно до класичного методу, загальне рішення диференціального рівняння (4.4) має вигляд:

$$j(t) = j_{\text{віль}}(t) + j_{\text{виму}}(t), \quad (4.5)$$

де $j_{\text{віль}}(t)$ – вільна складова рішення; $j_{\text{виму}}(t)$ – вимушена складова рішення.

Відповідно до наведеного вище фізичного визначення стійкості, стійкість системи залежить тільки від характеру вільного руху системи. Вільний рух лінійної або лінеаризованої системи описується однорідним диференціальним рівнянням з нульовою правою частиною:

$$a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = 0 \quad (4.6)$$

з початковими умовами (не нульовими):

$$j(0) = j_0; j'(0) = j'_0; j''(0) = j''_0; \dots; j^{(n-1)}(0) = j_0^{(n-1)}, \quad (4.7)$$

тобто, коли всі зовнішні збурення усунені і стан системи визначається лише власною структурою.

Вимушена складова, що залежить від вигляду зовнішнього впливу і правої частини диференціального рівняння, на стійкість системи не впливає.

Таким чином, система буде стійкою, якщо вільна складова $j_{\text{віль}}(t)$ перехідного процесу з часом буде дорівнювати нулю, тобто: $\lim_{t \rightarrow \infty} j_{\text{віль}}(t) = 0$.

Розв'язок диференціального рівняння (4.6) визначається коренями характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0. \quad (4.8)$$

Загальне рішення складається з ряду доданків, вид яких визначається тим, які корені будуть отримані при рішенні характеристичного рівняння (4.8): дійсні або комплексні і чи є серед них кратні корені.

Коефіцієнти у виразах для складових загального рішення визначаються початковими умовами і мають кінцеве значення оскільки при визначенні стійкості системи обговорювалось, що збурення, яке діє на систему обмежене і кінцеве (діє на систему на протязі скінченного проміжку часу і потім усувається).

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, то вигляд вільної складової рішення $j_{вил}(t)$ є сумою експонент:

$$j_{вил}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \dots + c_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (4.9)$$

де c_i – константи інтегрування (коефіцієнти); p_i – корені характеристичного рівняння; t – координата поточного часу; n – порядок рівняння динаміки.

Кожному дійсному кореню p_i в рішенні (4.9) відповідає доданок вигляду:

$$c_i e^{p_i t}. \quad (4.10)$$

Якщо $p_i < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ доданок (4.10) буде наближатись до нуля $c_i e^{p_i t} \rightarrow 0$. Якщо $p_i > 0$, то при $t \rightarrow \infty$ доданок (4.10) буде необмежено зростати $c_i e^{p_i t} \rightarrow \infty$. Якщо $p_i = 0$, то при $t \rightarrow \infty$ доданок (4.10) буде мати постійне значення $c_i e^{p_i t} \rightarrow c_i = const$.

Якщо корені характеристичного рівняння рівні (кратні), то вигляд вільної складової рішення $j_{вил}(t)$ (при наявності m кратних коренів) буде:

$$j_{вил}(t) = (c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^m) e^{p_1 t}.$$

Складова рішення типу $(c_1 + c_2 t + \dots + c_m t^m) e^{p_1 t}$ при $t \rightarrow \infty$ та $p_1 < 0$ буде давати невизначеність типу $(\infty \cdot 0)$, яку можна перетворити на

невизначеність типу (∞/∞) , при переносі $e^{p_1 t}$ в знаменник. За правилом Лопітала ця невизначеність при $p_1 < 0$ буде дорівнювати нулю.

Таким чином, якщо всі корені характеристичного рівняння дійсні і від'ємні, то всі доданки рішення будуть дорівнювати нулю при $t \rightarrow \infty$, а, отже, і їх сума.

Якщо корені характеристичного рівняння (4.8) будуть комплексними $p_{1,2} = a \pm j\omega$, вільна складова для однієї пари комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння записується:

$$j_{\text{віль}}(t) = e^{a \cdot t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t). \quad (4.11)$$

Якщо $a < 0$, то при $t \rightarrow \infty$ вільна складова (4.11) буде наближатись до нуля і являти собою затухаючі коливання з частотою ω . Якщо $a > 0$, то при $t \rightarrow \infty$ вільна складова (4.11) буде необмежено зростати і являти собою коливання з частотою ω і зі зростаючою амплітудою.

Таким чином, вільна складова рішення для пари комплексно-спряжених коренів буде затухати (наближатись до нуля) при $a < 0$. Те ж буде відбуватися і у випадку довільної кратності комплексної пари.

Якщо $a = 0$, то корені характеристичного рівняння (4.8) будуть уявними $p_{1,2} = \pm j\omega$ і вільна складова матиме вигляд:

$$j_{\text{віль}}(t) = (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t). \quad (4.12)$$

Складова, що відповідає спряженій парі уявних коренів ($a = 0$) – не затухає ніколи і являє собою незатухаючі коливання з частотою ω . Те ж буде відбуватися і у випадку довільної кратності уявної пари.

На підставі проведеного аналізу можна сформулювати загальну умову стійкості: для того, щоб система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння системи були від'ємними або мали від'ємну дійсну частину.

Іншими словами, для стійкості системи необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння системи були розташовані в лівій частині від уявної вісі на комплексній площині (рис. 4.5).

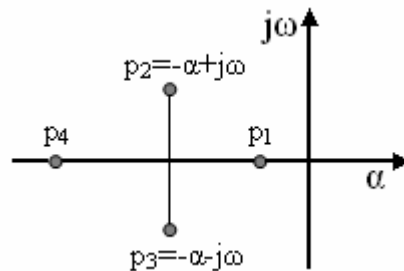


Рис. 4.5. Геометрична інтерпретація стійкої системи

Приклад 4.1. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$4j''' + 6j'' + 11j' + j = 3m.$$

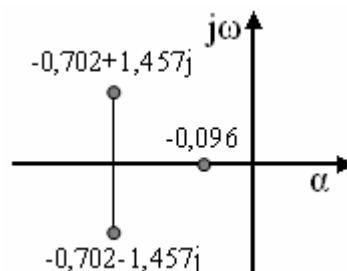
Запишемо характеристичне рівняння: $4p^3 + 6p^2 + 11p + 1 = 0$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння: $p_1 = -0,702 - 1,457j$;

$p_2 = -0,702 + 1,457j$; $p_3 = -0,096$.

Оскільки всі корені характеристичного рівняння системи від'ємні (мають від'ємну дійсну частину), то можна зробити висновок, що система стійка.

Можна нанести отримані значення коренів на комплексну площину і переконатися, що вони знаходяться в лівій напівплощині.



Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$f(p) := 4p^3 + 6p^2 + 11p + 1$$

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.702 - 1.457i \\ -0.702 + 1.457i \\ -0.096 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.2. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$8.4j''' + 1.6j'' + 3.8j' + 2j = 6.3m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $8.4p^3 + 1.6p^2 + 3.8p + 2 = 0$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння: $p_3 = -0,429$; $p_2 = 0,119 - 0,735j$; $p_1 = 0,119 + 0,735j$.

Оскільки серед коренів характеристичного рівняння системи є корені, що мають додатню дійсну частину, то можна зробити висновок, що система нестійка.

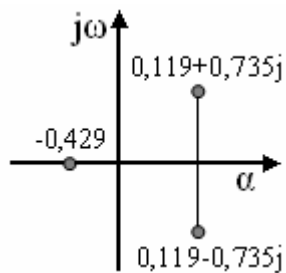
Фрагмент лістингу *Mathcad* наведений нижче:

$$f(p) := 8.4p^3 + 1.6p^2 + 3.8p + 2$$

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3.8 \\ 1.6 \\ 8.4 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.429 \\ 0.119 + 0.735i \\ 0.119 - 0.735i \end{pmatrix}$$

Якщо нанести отримані значення коренів на комплексну площину, то можна переконатися, що не всі корені характеристичного рівняння знаходяться в лівій напівплощині.



Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії стійкості дозволяють за коефіцієнтами характеристичного рівняння без визначення коренів рівняння зробити висновок про стійкість системи. Англійський математик Раус і німецький математик Гурвиць (працюючи в Швейцарії), незалежно один від одного і в різних формах вивели нерівності, дотримання яких є необхідною і достатньою умовою стійкості систем будь-якого порядку. Правила користування алгебраїчним критерієм стійкості Рауса наведені в додатку В.

Критерій Гурвиця

Найпоширенішим в інженерній практиці є критерій Гурвиця завдяки своїй простоті. Він заснований на побудові спеціальних визначників Гурвиця з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Критерій формулюється наступним чином: для того, щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб при $a_n > 0$ усі визначники Гурвиця були строго додатними (a_n – старший коефіцієнт).

Формування головного визначника Гурвиця для системи n – го порядку системи наступне:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0 \quad (4.13)$$

1) по головній діагоналі зліва направо починаючи з a_{n-1} послідовно у порядку зменшення індексів виписуємо коефіцієнти характеристичного рівняння до a_0 (всього n коефіцієнтів);

2) стовпці вверх від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами характеристичного рівняння з послідовно спадаючими індексами, в вниз – коефіцієнтами з послідовно зростаючими індексами;

3) на місце коефіцієнтів з індексами менше нуля або більше n проставляють нулі.

Примітка. Іноді для формування головного визначника Гурвиця користуються наступним алгоритмом:

в першому рядку визначника виписують коефіцієнти характеристичного рівняння зі спадаючими індексами (крок зміни індексу - 2) починаючи з a_{n-1} (тобто $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5} \dots$); всього заповнюється n елементів рядка (n стовпців); на місце коефіцієнтів, яких не вистачає, проставляють нулі;

вниз від першого рядка визначника стовпці визначника заповнюють коефіцієнтами з послідовно зростаючими індексами; нижче коефіцієнта a_n проставляють нулі.

Іншими визначниками Гурвиця є діагональні мінори головного визначника Гурвиця:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

і т.д.

Розглянемо умови стійкості систем першого, другого і третього порядку з використанням критерію Гурвиця:

система першого порядку ($n=1$). Характеристичного рівняння системи має вигляд: $a_1 p + a_0 = 0$. Найстарший коефіцієнт $a_1 > 0$, а визначник Гурвиця має вигляд: $\Delta_1 = |a_0|$. Таким чином, умови стійкості наступні: $a_1 > 0$; $a_0 > 0$.

система другого порядку ($n=2$). Характеристичного рівняння системи має вигляд: $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Найстарший коефіцієнт $a_2 > 0$, а визначники Гурвиця мають вигляд:

$$\Delta_1 = |a_1|;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0.$$

Таким чином, умови стійкості наступні: $a_2 > 0$; $a_1 > 0$; $a_0 > 0$.

система третього порядку ($n=3$). Характеристичного рівняння системи має вигляд: $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Найстарший коефіцієнт $a_3 > 0$, а визначники Гурвиця мають вигляд:

$$\Delta_1 = |a_2|;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2.$$

Таким чином, умови стійкості наступні: $a_3 > 0; a_2 > 0; a_1 > 0; a_0 > 0$ і $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Продовжуючи процес дослідження стійкості системи при подальшому збільшенні n , можна переконатись, що необхідною умовою стійкості є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння (при $a_n > 0$).

Критерій Гурвиця застосовують при $n \leq 4$. При великих порядках зростає число визначників, і процес стає трудомістким. Недолік критерію Гурвиця – мала наочність. Критерій зручний для реалізації на ЕОМ.

Примітка. Якщо необхідно виконати дослідження стійкості системи при $a_n < 0$, необхідно спочатку помножити ліву і праву частини рівняння на (-1) .

Використання функцій математичного пакета Mathcad при визначенні стійкості системи з використанням кореневого критерію і критерію Гурвиця

При визначенні стійкості системи з використанням кореневого критерію необхідно визначати корені характеристичного рівняння.

Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному пакеті *Mathcad* розглянуто в лабораторній роботі 1.

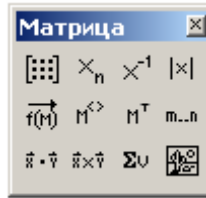
При визначенні стійкості системи з використанням критерію Гурвиця необхідно вміти знаходити визначники Гурвиця.

У *Mathcad* є можливість обчислювати визначник будь-якої матриці і з будь-якою заданою точністю обчислень. Визначник матриці обчислюється за допомогою оператора " $|A|$ ", де A – задана в завданні матриця.

Наприклад, операція обчислення визначника в Mathcad запишеться у вигляді двох операцій, а саме, завдання матриці A і виведення її визначника:

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad |A1| = -412$$

Ці операції знаходяться на панелі інструментів **Матриця**.



Приклад 4.3. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$4j''' + 6j'' + 11j' + j = 3m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $4p^3 + 6p^2 + 11p + 1 = 0$.

Побудуємо визначники Гурвиця і виконаємо їх обчислення в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

```

ORIGIN := 1
Знаходження визначників Гурвиця:
D1 := (6)      |D1| = 6

D2 := ( 6  1 )  |D2| = 62
      ( 4 11 )

D3 := ( 6  1  0 )  |D3| = 62
      ( 4 11  0 )
      ( 0  6  1 )

```

Як видно з наведених розрахунків, усі визначники Гурвиця є додатними. Таким чином, система стійка.

Приклад 4.4. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$8.4j''' + 1.6j'' + 3.8j' + 2j = 6.3m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $8.4p^3 + 1.6p^2 + 3.8p + 2 = 0$.

Побудуємо визначники Гурвиця і виконаємо їх обчислення в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

ORIDGIN := 1

Знаходження визначників Гурвиця:

$$D1 := (1.6) \quad |D1| = 1.6$$

$$D2 := \begin{pmatrix} 1.6 & 2 \\ 8.4 & 3.8 \end{pmatrix} \quad |D2| = -10.72$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 1.6 & 2 & 0 \\ 8.4 & 3.8 & 0 \\ 0 & 1.6 & 2 \end{pmatrix} \quad |D3| = -21.44$$

Як видно з наведених розрахунків, не всі визначники Гурвиця є додатними. Таким чином, система нестійка.

Приклад 4.5. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$2j^{(4)} + 3j''' + 14j'' + 3j' + 2j = 9.1m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^4 + 3p^3 + 14p^2 + 3p + 2 = 0$.

Побудуємо визначники Гурвиця і виконаємо їх обчислення в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

ORIDGIN := 1

Знаходження визначників Гурвиця:

$$D1 := (3) \quad |D1| = 3$$

$$D2 := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \quad |D2| = 36$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 14 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad |D3| = 90$$

$$D4 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 2 \end{pmatrix} \quad |D4| = 180$$

Як видно з наведених розрахунків, усі визначники Гурвиця є додатними. Таким чином, система стійка.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати оцінку стійкості заданих систем автоматичного керування з використанням наступних критеріїв стійкості: кореневого критерію і критерію Гурвиця.
2. При використанні кореневого критерію: отримати характеристичне рівняння системи, знайти корені характеристичного рівняння і за ними виконати оцінку стійкості системи.
3. При використанні критерію Гурвиця: отримати характеристичне рівняння системи, записати необхідні визначники Гурвиця, обчислити їх і за отриманими результатами виконати оцінку стійкості системи.
4. Запрограмувати рішення характеристичного рівняння і обчислення визначників Гурвиця в середовищі Mathcad.
5. Продемонструвати розрахунки і роботу програми викладачу.
6. Оформити протокол лабораторної роботи.

Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до задалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додається роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

- лістинг програми з результатами розрахунків.

Контрольні запитання

1. Поняття нестійкої системи.
2. Поняття стійкої системи.
3. Поняття нейтральної системи (такої, що знаходиться на межі стійкості).
4. За якою складовою рішення диференціального рівняння аналізують стійкість системи і чому?
5. При яких дійсних коренях характеристичного рівняння система буде стійкою?
6. При яких комплексно-спряжених коренях характеристичного рівняння система буде стійкою?
7. При яких коренях характеристичного рівняння система буде знаходитись на межі стійкості?
8. При яких коренях характеристичного рівняння система буде нестійкою?
9. Як на комплексній площині розташовуються корені характеристичного рівняння стійкої системи?
10. Як за критерієм Гурвиця визначається стійкість системи?
11. Алгоритм формування головного визначника Гурвиця.
12. При яких коефіцієнтах характеристичного рівняння система першого порядку буде стійкою?
13. При яких коефіцієнтах характеристичного рівняння система другого порядку буде стійкою?
14. Яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти характеристичного рівняння системи третього порядку для її стійкості?

Лабораторна робота № 5

Частотний критерій стійкості

Мета та основні завдання: Дослідити процес визначення стійкості системи автоматичного керування за допомогою частотного критерію стійкості. Набути вмінь визначення стійкості САР з використанням частотного критерію стійкості Михайлова.

Завдання¹. Вивчити оцінку стійкості САР за допомогою частотного критерію стійкості Михайлова. Розглянути побудову годографу функції Михайлова. Вивчити наслідок із критерію Михайлова про чергуємість коренів уявної і дійсної функцій. Розглянути достатні, але не необхідні ознаки нестійкості САР відповідно до критерію Михайлова.

Короткі теоретичні відомості

Частотні критерії стійкості

Частотні критерії стійкості в більшості випадків застосовуються в якості графоаналітичних критеріїв і забезпечують наочність інженерних розрахунків. Ці критерії досить поширені. Вони дозволяють виносити судження про стійкість САР за виглядом їх частотних характеристик. Частотні критерії зручні для практичного застосування і дозволяють досить легко досліджувати стійкість систем високих порядків. При цьому, вони мають досить просту геометричну інтерпретацію.

Критерій стійкості Михайлова

Критерій стійкості Михайлова заснований на розгляді характеристичного рівняння системи і базується на принципі аргументу функції комплексної змінної.

Нехай характеристичне рівняння досліджуваної системи має вид:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

¹ Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

При цьому для аналізу стійкості системи розглядається функція $F(p)$, що будується на основі характеристичного рівняння:

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0. \quad (5.1)$$

При заміні $p = j\omega$ вона має вигляд:

$$F(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0 = \\ = R(\omega) + jI(\omega) \quad (5.2)$$

де $R(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots$;

$I(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - a_7 \omega^7 + \dots = \omega(a_1 - a_3 \omega^2 + a_5 \omega^4 - a_7 \omega^6 + \dots)$. При цьому, функція $R(\omega)$ – є парною, а $I(\omega)$ – непарною функцією від ω .

Цю функцію називають функцією Михайлова. При зміні частоти кінець вектора $F(j\omega)$ описуватиме деяку криву в комплексній площині, яка називається годографом Михайлова. Для аналізу стійкості системи слід визначити приріст аргументу функції Михайлова (поворот вектора Михайлова) при зміні ω від $-\infty$ до $+\infty$.

Якщо корені характеристичного рівняння $F(p)$ відомі, то його можна записати у вигляді:

$$F(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n), \quad (5.3)$$

де p_1, p_2, \dots, p_n – корені полінома $F(p)$. При заміні $p = j\omega$ в (5.3) отримуємо для функції Михайлова:

$$F(j\omega) = a_n (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (5.4)$$

Кожен корінь геометрично може бути зображений вектором, проведеним з початку координат до точки, наприклад, p_1 (рис. 5.1). Довжина цього вектора дорівнює модулю комплексного числа, а кут, утворений вектором з позитивним напрямом дійсній осі, – аргументу (або фазі) комплексного числа.

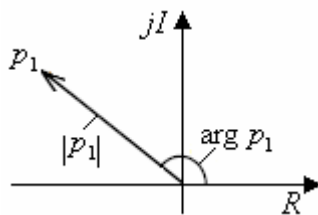


Рис. 5.1. Корінь на комплексній площині

Для кореня $p_i = a_i + jw_i$ модуль буде дорівнювати $|p_i| = \sqrt{a_i^2 + w_i^2}$, а аргумент $-\arg p_i = \arctg\left(\frac{w_i}{a_i}\right)$.

Величини, взяті в дужки у виразі (5.4) $-(jw - p_1)$, є векторами, кінці котрих будуть знаходитись на уявній вісі (рис. 5.2). У разі стійкої системи корені характеристичного рівняння розташовані тільки в лівій напівплощині комплексної площини. Якщо корінь характеристичного рівняння дійсний від'ємний і має значення $p_1 = -a_1$, то елементарний вектор $(jw - p_1)$ на комплексній площини матиме вигляд, як показано на рис. 5.2-а. При комплексно спряжених коренях характеристичного рівняння з від'ємною дійсною частиною $p_{2,3} = -a \pm jw$ елементарні вектори $(jw - p_2)$ і $(jw - p_3)$ матимуть вигляд, як показано на рис. 5.2-б.

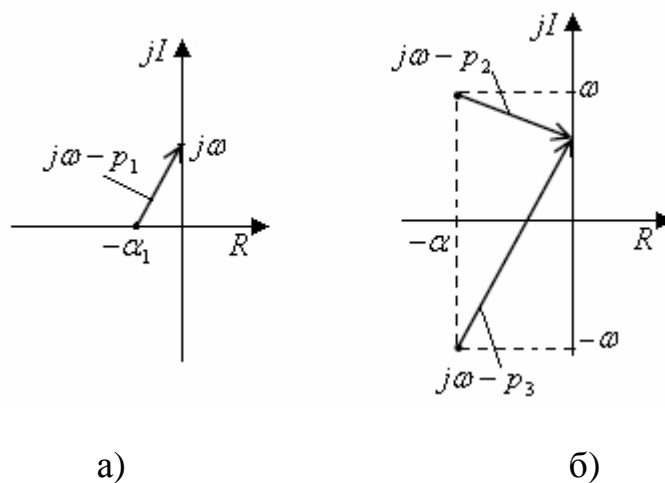


Рис. 5.2. Зображення елементарного вектора $(jw - p_1)$, що відповідає стійкому дійсному кореню (а) і парі стійких комплексно спряжених коренів (б)

При розгляді вектора $F(j\omega)$ згідно з (5.4), його модуль дорівнює:

$$|F(j\omega)| = a_n |(j\omega - p_1)| \cdot |(j\omega - p_2)| \dots |(j\omega - p_n)|, \quad (5.5)$$

а аргумент

$$\arg F(j\omega) = \arg(j\omega - p_1) + \arg(j\omega - p_2) + \dots + \arg(j\omega - p_n). \quad (5.6)$$

За позитивний напрям відліку кутів приймається обертання вектора проти годинникової стрілки.

Якщо корінь p_1 лежить зліва від уявної осі, то при зростанні ω від $-\infty$ до $+\infty$ вектор $j\omega - p_1$ буде повертатись від положення вертикально вниз до положення вертикально вгору, рухаючись проти годинникової стрілки, в результаті чого отримає приріст аргументу $+p$ (рис. 5.3-а). Відповідно, якщо p_1 знаходиться справа від уявної осі, то вектор буде повертатись за годинниковою стрілкою і приріст аргументу буде $-p$ (рис. 5.3-б). При цьому початок вектора завжди залишається в точці А, а кінець переміщається по всій уявній вісі. Згідно з формулою (5.5), приріст аргументна вектора $F(j\omega)$ буде складатись з приростів аргументів векторів $j\omega - p_i, i = 1, 2, \dots, n$ з урахуванням їх знаків.

Отже, якщо система має порядок n і серед n коренів її характеристичного рівняння m знаходяться в правій півплощині й відповідно $(n - m)$ в лівій півплощині, то сумарний приріст аргументу вектора $F(j\omega)$ складатиме:

$$\Delta \arg F(j\omega) = (n - m)p - mp = (n - 2m)p \quad (5.7)$$

$$-\infty \leq \omega \leq \infty$$

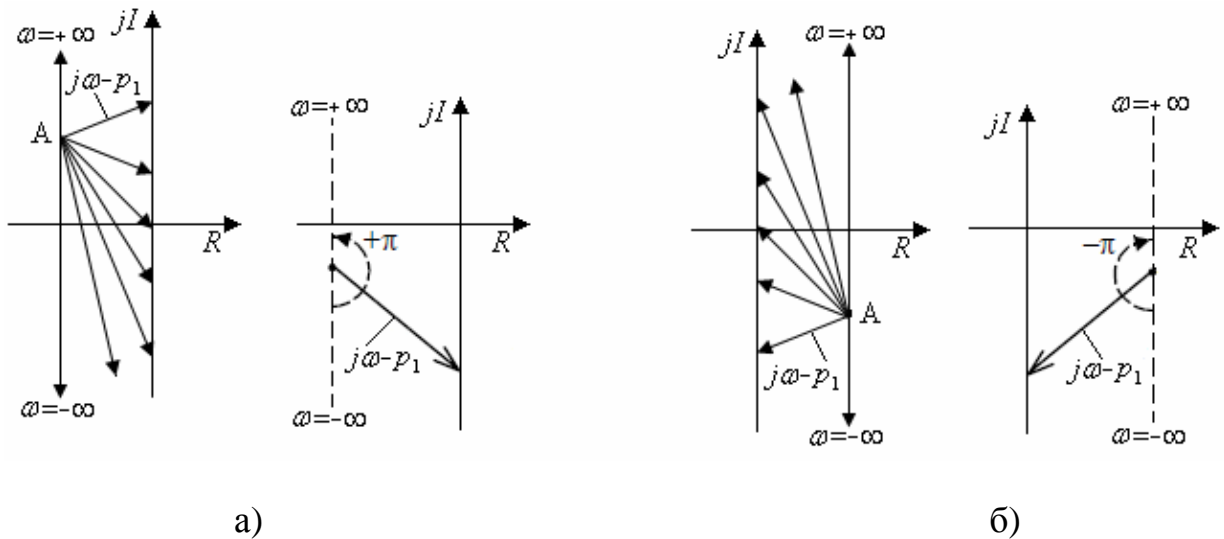


Рис. 5.3 Ілюстрація руху векторів (рух і схема руху) при корені зліва від уявної осі (а) і при корені справа від уявної осі (б)

Рівняння (5.7) має єдину невідому величину m , рівняння для знаходження якої матиме вигляд:

$$m = \frac{pn - \Delta \arg F(jw)}{2p}.$$

Якщо знайдене значення m буде більшим від нуля, то це означатиме наявність коренів характеристичного рівняння в правій півплощині. І тоді система буде нестійкою. Стійкість буде забезпечено тільки тоді, коли не буде коренів характеристичного рівняння в правій півплощині і $m = 0$.

При $m = 0$ сумарний приріст аргументу вектора $F(jw)$ складатиме:

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(jw) &= np \\ -\infty \leq w \leq \infty \end{aligned} \quad (5.9)$$

При зміні частоти w від 0 до $+\infty$ зміна аргументу вектора $F(jw)$ буде удвічі менша (враховуємо факт симетрії годографа $F(jw)$ відносно дійсної осі – функція $R(w)$ є парною):

$$\begin{aligned} \Delta \arg F(jw) &= n \frac{p}{2} \\ 0 \leq w \leq \infty \end{aligned} \quad (5.10)$$

Умова (5.10) є необхідною, але не достатньою умовою стійкості системи. Для отримання необхідної і достатньої умови стійкості системи необхідно виключити корені характеристичного рівняння, що лежать на уявній осі (при яких комплексний поліном $F(j\omega) = 0$), тобто повинна виконуватися ще одна умова:

$$F(j\omega) \neq 0. \quad (5.11)$$

Таким чином, для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова при зміні ω від 0 до $+\infty$ обернувся, не проходячи через нуль, навколо початку координат проти годинникової стрілки на кут $n\frac{\pi}{2}$, де n – порядок характеристичного рівняння.

Для стійких систем при $a_n > 0$ всі коефіцієнти характеристичного рівняння додатні, і тому годограф функції Михайлова починається на додатній дійсній півосі $F(0) = a_0$ ($a_0 > 0$).

Крім того, для стійких систем з ростом частоти ω фаза (аргумент $\arg F(j\omega)$) повинна зростати монотонно, тобто вектор $F(j\omega)$ повинен повертатися тільки проти годинникової стрілки. Це обумовлюється тим, що з ростом частоти монотонно зростають аргументи елементарних векторів $j\omega - p_i$, що є додтками $\arg F(j\omega)$ – формула (5.6).

З урахуванням всього вищесказаного **критерій стійкості Михайлова** формулюється наступним чином:

Для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова при зміні частоти від 0 до $+\infty$, починаючись при $\omega = 0$ на дійсній додатній півосі, проходив тільки проти годинникової стрілки послідовно n квадрантів координатної площини, де n – порядок характеристичного рівняння.

Для стійких систем годограф Михайлова має плавну спіралевидну форму, проходить послідовно n квадрантів і йде в нескінченність в тому квадранті, номер якого дорівнює ступеню характеристичного рівняння (рис. 5.4).

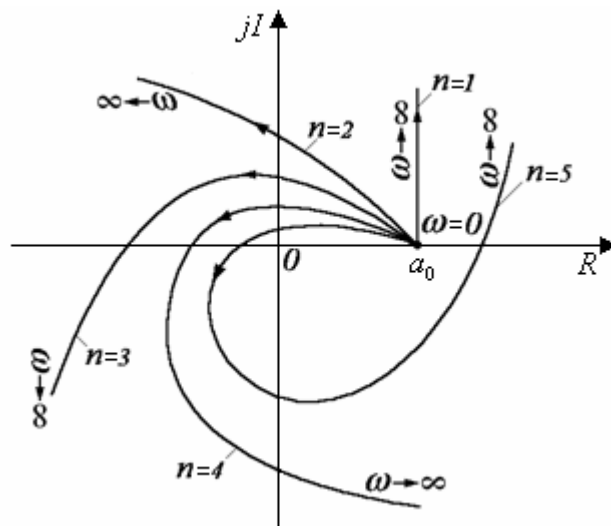


Рис. 5.4. Годографи Михайлова для стійких систем 1...5 порядків

Налідок з критерію Михайлова

З аналізу годографа Михайлова можна встановити наступне: коли годограф Михайлова послідовно проходить квадранти при зміні частоти від 0 до $+\infty$, то дійсна і уявна осі перетинаються годографом по черзі. В точках перетину з дійсною віссю обертається в нуль уявна функція $I(w)$, а в точках перетину годографа з уявною віссю обертається в нуль дійсна функція $R(w)$ (рис. 5.5-а). Як видно з рисунку, при частоті $\omega_0=0$ годограф Михайлова починається на дійсній додатній півосі в точці $1-F(0)=a_0$ і ця точка є точкою перетину дійсної осі. При збільшенні частоти годограф Михайлова перетинає уявну вісь в точці 2 при частоті ω_1 , потім знову дійсну вісь в точці 3 при частоті ω_2 , потім знову уявну вісь в точці 4 при частоті ω_3 і т.д. Частоти, при яких відбувається перетин осей, визначаються як корені наступних рівнянь: $R(w)=0$ і $I(w)=0$ (або точки перетину кривих $R(w)$ і $I(w)$ з віссю абсцис (рис. 5.5-б) дають корені цих рівнянь). Оскільки побудова годографа виконується при зміні частоти від 0 до $+\infty$, то враховуються додатні частоти.

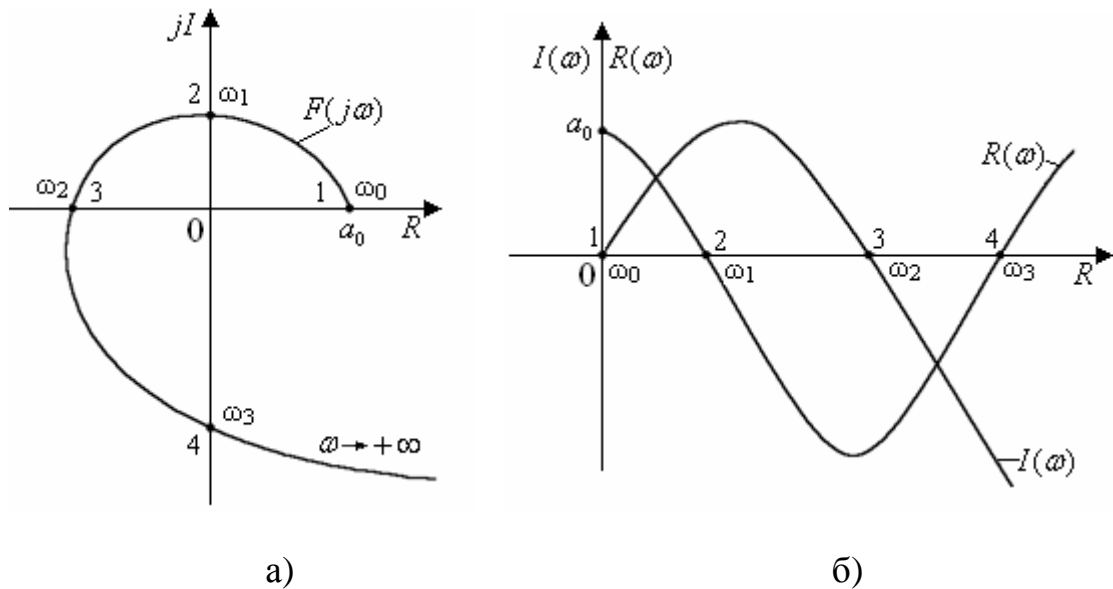


Рис. 5.5. Чергуємість коренів дійсної і уявної частин функції Михайлова

Таким чином, для стійкої системи обов'язкове дотримання нерівності:

$w_0 < w_1 < w_2 < w_3 < w_4 < \dots$, де $w_0, w_2, w_4, w_6, \dots$ – корені уявної частини функції Михайлова $I(w) = 0$, а $w_1, w_3, w_5, w_7, \dots$ – корені дійсної частини функції Михайлова $R(w) = 0$.

Тоді **наслідок** з критерію стійкості Михайлова формулюється наступним чином:

система автоматичного керування буде стійка, коли уявна і дійсна частини функції Михайлова обертаються в нуль по чергово, тобто мають всі дійсні корені, які чергуються, причому загальне число цих коренів дорівнює порядку характеристичного рівняння n , і при $\omega = 0$ задовольняється умові $R(0) > 0$.

Ознаки нестійкості системи за критерієм Михайлова наступні:

- при $\omega = 0$ годограф Михайлова почався не на дійсній додатній вісі (рис. 5.6-а);
- вектор годографа Михайлова на деякій ділянці обертався за годинниковою стрілкою (рис. 5.6-б- ділянка 1-2);
- порушена послідовність проходження квадрантів годографом Михайлова (рис. 5.6-в).

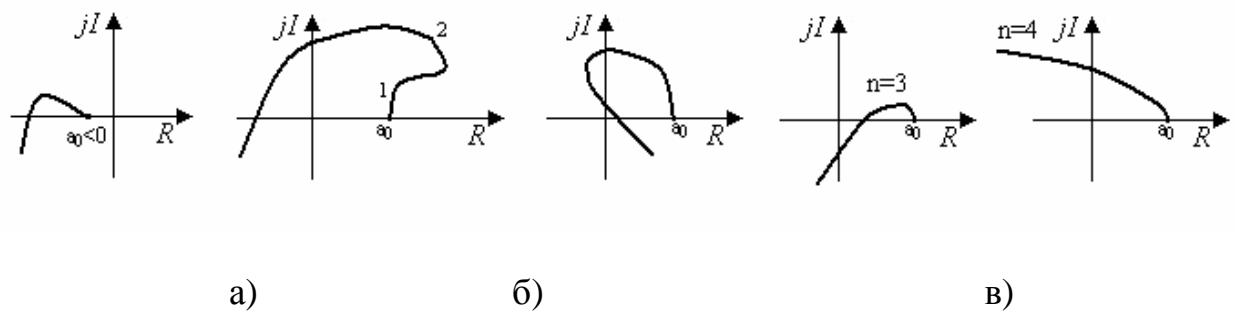


Рис. 5.6. Годографи Михайлова для не стійких систем:

- а) початок на від'ємній дійсній осі; б) обертання за годинниковою стрілкою;
- в) порушена послідовність проходження квадрантів (три приклади)

Для нейтральних систем годограф Михайлова зображений на рис. 5.7. Якщо годограф Михайлова виходить з початку координат (рис. 5.7-а), то характеристичне рівняння системи має нульовий корінь (при $a_0 = 0$) і система нейтральна (межа стійкості першого типу – аперіодична межа стійкості).

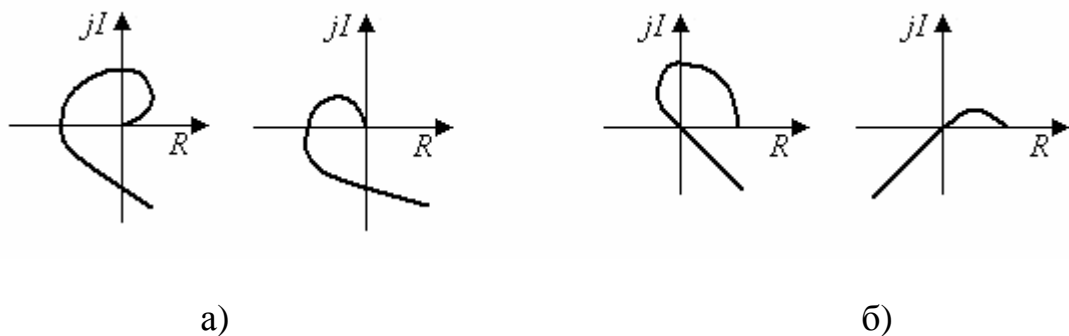


Рис. 5.7. Годографи Михайлова для нейтральних систем:

- а) випадок нейтральної системи з нульовим коренем;
- б) випадок коливальної межі стійкості

Якщо годограф Михайлова при деякому значенні частоти ω_k проходить через початок координат (рис. 5.7-б), то при цій частоті в системі будуть незатухаючі коливання і система буде на межі стійкості (межа стійкості другого типу – коливальна межа стійкості).

Приклад 5.1. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$1.6j''' + 8.4j'' + 2.6j' + 3.1j = 9.3m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $1.6p^3 + 8.4p^2 + 2.6p + 3.1 = 0$.

Знайдемо функцію Михайлова:

$$F(j\omega) = 1.6(j\omega)^3 + 8.4(j\omega)^2 + 2.6(j\omega) + 3.1 = R(\omega) + jI(\omega)$$

і виділимо дійсну і уявну складові:

$$R(\omega) = 3.1 - 8.4\omega^2;$$

$$I(\omega) = 2.6\omega - 1.6\omega^3 = \omega(2.6 - 1.6\omega^2).$$

Побудуємо годограф Михайлова в середовищі Excel. Для цього протабулюємо дійсну і уявну складові при різних частотах і за отриманими даними побудуємо годограф.

Нижче наведені результати розрахунків і побудований годограф Михайлова (рис. 5.8) у середовищі Excel.

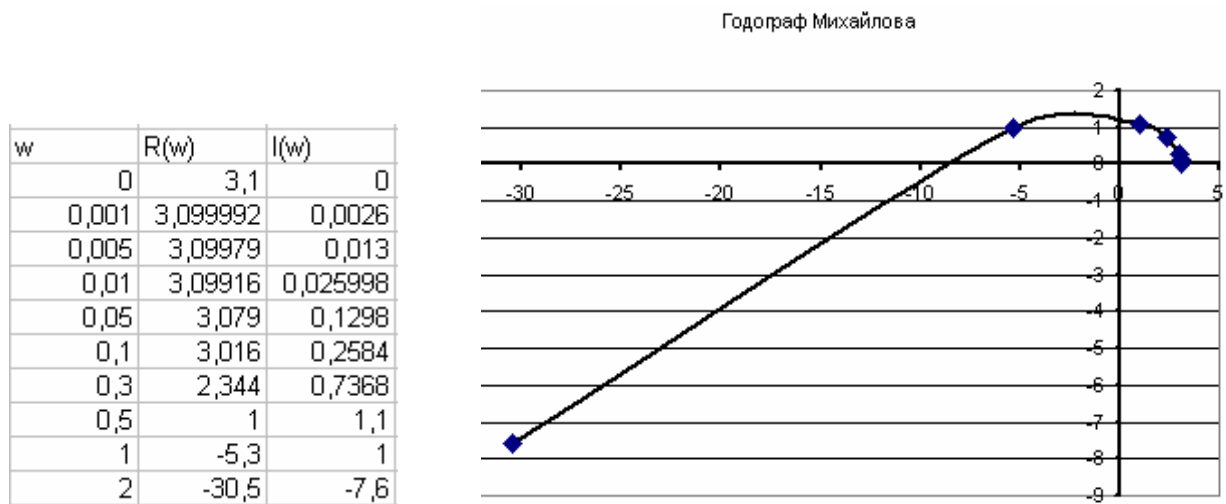


Рис. 5.8. Годограф Михайлова

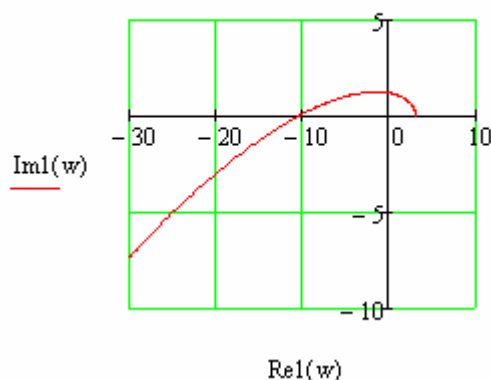
Як видно з наведеного рисунку, годограф Михайлова починається на дійсній додатній півосі, обертається проти годинникової стрілки і послідовно проходить 3 квадранти координатної площини (3 – порядок характеристичного рівняння досліджуваної системи). Отже, система стійка.

Використання функцій математичного пакета Mathcad при застосуванні критерію Михайлова

Засоби математичного пакета Mathcad також мають всі можливості для зручної побудови годографа Михайлова.

Нижче наведений фрагмент лістингу Mathcad по дослідженню стійкості системи, яка була розглянута в прикладі 5.1.

```
Побудова годографа Михайлова
Знайдемо функцію Михайлова:
Fm(jw) := 1.6(jw)3 + 8.4(jw)2 + 2.6(jw) + 3.1
Задамо діапазон зміни частоти:
w := 0,001..5
Знайдемо дійсну і уявну складові:
Re1(w) := 3.1 - 8.4w2
Im1(w) := 2.6·w - 1.6w3
Побудуємо годограф Михайлова:
```



Як видно, наведені дані аналогічні результатам, отриманим у середовищі Excel, що наведені вище. Відповідно і висновок про стійкість системи аналогічний.

Але в математичному пакеті Mathcad є функції, що дозволяють без самостійних розрахунків автоматично виділити дійсну і уявну складові комплексного числа – функції Михайлова (функція Михайлова є комплексним числом).

Це функції **Im(z)** і **Re(z)**. Перша повертає уявну частину комплексного числа, вектора або матриці z , а друга повертає дійсну частину комплексного числа, вектора або матриці z .

Розглянемо застосування вказаних функцій для побудови годографа Михайлова. В якості приклада використаємо систему, що була розглянута в прикладі 5.1.

Нижче наведений фрагмент лістингу Mathcad з дослідження стійкості системи (приклад 5.1) при використанні функцій **Im(z)** і **Re(z)**.

Побудова годографу Михайлова:

Визначення коефіцієнтів:

$$a3 := 1.6 \quad a2 := 8.4 \quad a1 := 2.6 \quad a0 := 3.3$$

Визначення функції Михайлова:

$$Fm(w) := a3 \cdot (w \cdot i)^3 + a2 \cdot (w \cdot i)^2 + a1 \cdot (w \cdot i) + a0$$

Задаємо діапазон зміни частоти:

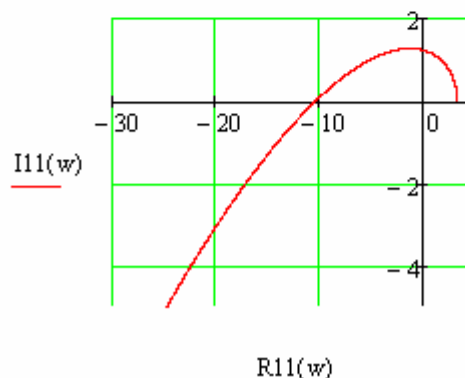
$$w := 0, 0.001 \dots 10$$

Визначення дійсної і уявної частин:

$$R11(w) := \text{Re}(Fm(w))$$

$$I11(w) := \text{Im}(Fm(w))$$

Побудова годографу:



Аналіз стійкості системи автоматичного керування зручно проводити і з використанням наслідку з критерію стійкості Михайлова. Для користування ним необхідно визначити корені уявної і дійсної частин функції Михайлова і перевірити умову їх чергуємості.

Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному пакеті Mathcad розглянуто в лабораторній роботі 1.

Для системи, що була розглянута в прикладі 5.1, розглянемо оцінку стійкості з використанням наслідку з критерію стійкості Михайлова.

Дійсна і уявна складові були виділені вище (приклад 5.1):

$$R(w) = 3.1 - 8.4w^2;$$

$$I(w) = 2.6w - 1.6w^3 = w(2.6 - 1.6w^2).$$

Виконаємо обчислення коренів дійсної і уявної складових в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Знайдемо корені дійсної складової функції Михайлова:

$$R1(\omega) := -8.4 \omega^2 + 3.1$$

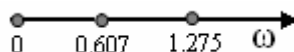
$$u := \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0 \\ -8.4 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(u) = \begin{pmatrix} -0.607 \\ 0.607 \end{pmatrix}$$

Знайдемо корені уявної складової функції Михайлова:

$$I2(\omega) := -1.6 \omega^3 + 2.6 \omega$$

$$w := \begin{pmatrix} 0 \\ 2.6 \\ 0 \\ -1.6 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(w) = \begin{pmatrix} -1.275 \\ 0 \\ 1.275 \end{pmatrix}$$

Як видно з наведених розрахунків, корені дійсної й уявної складових чергуються.



Таким чином, система стійка.

Приклад 5.2. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$2j^{(4)} + 1.3j''' + j'' + 5j' + 7j = 5.1m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^4 + 1.3p^3 + p^2 + 5p + 7 = 0$.

Знайдемо функцію Михайлова:

$$F(jw) = 2(jw)^4 + 1.3(jw)^3 + (jw)^2 + 5(jw) + 7 = R(w) + jI(w)$$

і виділимо дійсну і уявну складові:

$$R(w) = 7 - w^2 + 2w^4;$$

$$I(w) = 5w - 1.3w^3 = w(5 - 1.3w^2).$$

Виконаємо обчислення коренів дійсної і уявної складових в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Знайдемо корені дійсної складової функції Михайлова:

$$R1(\omega) := 2 \cdot \omega^4 - 1 \cdot \omega^2 + 7$$

$$u := \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(u) = \begin{pmatrix} -1.03 + 0.9i \\ -1.03 - 0.9i \\ 1.03 + 0.9i \\ 1.03 - 0.9i \end{pmatrix}$$

Знайдемо корені уявної складової функції Михайлова:

$$I2(\omega) := -1.3 \cdot \omega^3 + 5 \cdot \omega$$

$$w := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1.3 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(w) = \begin{pmatrix} -1.961 \\ 0 \\ 1.961 \end{pmatrix}$$

Як видно з наведених розрахунків, корені дійсної складової комплексні. Про чергуємість комплексних коренів не говорять. Отже, система нестійка.

Аналіз стійкості цієї системи за побудованим годографом Михайлова наведений в Додатку Г.

Приклад 5.3. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням виду:

$$j^{(4)} + 2j''' + 16j'' + 2j' + 7j = 4.8m.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $p^4 + 2p^3 + 16p^2 + 2p + 7 = 0$.

Знайдемо функцію Михайлова:

$$F(jw) = 2(jw)^4 + 1.3(jw)^3 + (jw)^2 + 5(jw) + 7 = R(w) + jI(w)$$

і виділимо дійсну і уявну складові:

$$R(w) = 7 - 16w^2 + w^4;$$

$$I(w) = 2w - 2w^3 = w(2 - 2w^2).$$

Виконаємо обчислення коренів дійсної і уявної складових в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Знайдемо корені дійсної складової функції Михайлова:

$$R1(\omega) := 1 \cdot \omega^4 - 16 \cdot \omega^2 + 7$$

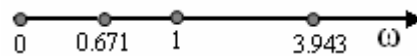
$$u := \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -16 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(u) = \begin{pmatrix} -3.943 \\ -0.671 \\ 0.671 \\ 3.943 \end{pmatrix}$$

Знайдемо корені уявної складової функції Михайлова:

$$I2(\omega) := -2 \cdot \omega^3 + 2 \cdot \omega$$

$$w := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(w) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Як видно з наведених розрахунків, корені дійсної й уявної складових чергуються.



Таким чином, система стійка.

Аналіз стійкості цієї системи за побудованим годографом Михайлова наведений в Додатку Г.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати оцінку стійкості заданої систем автоматичного керування з використанням частотного критерію стійкості Михайлова.
2. При використанні критерію Михайлова: отримати характеристичне рівняння системи і функцію Михайлова, побудувати годограф функції Михайлова (наприклад, з використанням MS Excel).
3. За характером проходження годографа функції Михайлова на комплексній площині оцінити стійкість системи.
4. Запрограмувати побудову годографа функції Михайлова в середовищі Mathcad.
5. При використанні наслідку критерію Михайлова: знайти дійсну і уявну частини функції Михайлова, визначити корені цих частин і перевірити чергуємість коренів уявної і дійсної функцій.
6. Запрограмувати перевірку чергуємісті коренів уявної і дійсної функцій в середовищі Mathcad.
7. Продемонструвати розрахунки і роботу програм викладачу.
8. Оформити протокол лабораторної роботи.

Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до заздалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додається роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

- лістинги програм з результатами розрахунків і побудов.

Контрольні запитання

1. Як за критерієм Михайлова визначається стійкість системи?
2. Яку функцію називають функцією Михайлова?
3. Яким буде приріст аргументу функції Михайлова, якщо корінь характеристичного рівняння лежить зліва від уявної осі?
4. Яким буде приріст аргументу функції Михайлова, якщо корінь характеристичного рівняння лежить праворуч від уявної осі?
5. Скільки квадрантів комплексної координатної площини повинен пройти годограф Михайлова стійкої системи?
6. В якому квадранті і в якій точці починається годограф Михайлова стійкої системи?
7. Як співвідносяться між собою корені уявної і дійсної частин функції Михайлова?
8. Які ознаки нестійкості системи за критерієм Михайлова?
9. Якою буде система, якщо годограф Михайлова виходить з початку координат?
10. Якою буде система, якщо годограф Михайлова проходить через початок координат?
11. Якому значенню дорівнює вільний член характеристичного рівняння в нейтральній системі?

Література

Основна

1. Остапенко Ю.О. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів керування: Підручник [Текст] / Ю.О.Остапенко.– К.: Задруга, 1999. – 424с.
2. Полоцкий Л.М. Автоматизация химических производств. Теория, расчет и проектирование систем автоматизации [Текст] / Л.М. Полоцкий, Г.И. Лапшенков. – М.: Химия, 1982. – 296 с.
3. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. Ч. 1.[Текст] / А. А. Воронов. М. – Л. : Энергия, 1965. – 396 с.
4. Гузенко А. И. Основы теории автоматического регулирования [Текст] / А. И. М. Гузенко. – М.: Высшая школа, 1967. – 408 с.
5. Ладиев Р.Я. Аналитические методы описания объектов управления с сосредоточенными параметрами. Ч. 1. [Текст] / Р.Я. Ладиев, Ю.А. Остапенко, А.И. Кубрак, М.З. Кваско. – К.: ЛФОП КПИ, 1973. – 134 с.
6. Перов В.Л. Основы теории автоматического регулирования химико-технологических процессов [Текст] / В.Л. Перов. – М.: Химия, 1970. – 352 с.
7. Экспериментальное определение динамических характеристик объектов управления [Текст] / Балакирев В.С. и др. – М.:, Энергия, 1967. – 232 с.
8. Гурский Д. А. Вычисления в Mathcad 12 [Текст] / Д. А. Гурский, Е. С. Турбина . – СПб.: Питер, 2006. – 544 с.
9. Лазарева Т.Я. Основы теории автоматического управления: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / Т.Я. Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 352 с.
- 10.Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / А.А. Ерофеев. – СПб.: Политехника, 2003.–302 с.

11. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы: Учебное пособие. [Текст] / И.В. Мирошник. – СПб.: Питер, 2005.–336 с.
12. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем Изд. 3-е, перераб. и доп. [Текст] / Н.Н. Иващенко.–М.: Машиностроение, 1973. – 606 с.

Додаткова

13. Теория автоматического управления: учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч.1: Теория линейных систем автоматического управления 2-е изд., перераб. и доп. [Текст] / под ред. А.А. Воронова. – М.: Высш. шк., 1986. – 367 с.
14. Автоматическое управление в химической промышленности [Текст] / под ред. Е.Г. Дудникова. – М., Химия, 1987.– 368 с.
15. Кафаров В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: Уч. пособие. [Текст] / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов – М.: Высшая школа, 1991. – 400 с.
16. Медведев Ю. И. Курс лекций по теории автоматического управления. Ч. 1: Учебное пособие. [Текст] / Ю. И. Медведев. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2004. – 110 с.
17. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. [Текст] / Д.П. Ким. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.
18. Иващенко И.И. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. [Текст] / И.И. Иващенко. –Л.: Машгиз, 1958. – 532с.

Заходи безпеки під час виконання лабораторних робіт

Цикл лабораторних робіт з дисципліни «Теорія автоматичного керування» виконуються в комп'ютерному класі кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету, де розміщені персональні комп'ютери. Обладнання живиться електричним струмом напругою 220 В. Тому при виконанні лабораторних робіт слід дотримуватися заходів безпеки наступних інструкцій.

ІНСТРУКЦІЯ

з техніки безпеки при навчанні студентів на ПЕОМ в учбових лабораторіях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету

1. Знання і суворе дотримання цих правил є обов'язковим для всіх осіб, допущених до роботи на ПЕОМ. Доведення їх до кожного зі студентів підтверджується особистим підписом кожного з них у контрольному листі з техніки безпеки. Особи, які не одержали такого інструктажу та не поставили підпис у контрольному листі з техніки безпеки, до роботи на ПЕОМ не допускаються.
2. Всі роботи в учбових лабораторіях кафедри кібернетики ХТП проводяться лише з дозволу викладача або співробітника кафедри.
3. Під час проведення занять в учбовій лабораторії не повинні знаходитися сторонні особи, в тому числі студенти інших груп. Студенти не повинні самовільно залишати учбову лабораторію під час занять.
4. При роботі на ПЕОМ треба пам'ятати, що в них використовується напруга, небезпечна для життя.
5. Всі особи, працюючі в учбових лабораторіях кафедри КХТП повинні бути ознайомлені з правилами надання першої медичної допомоги при ураженні електричним струмом.

6. Перед вмиканням ПЕОМ кожен з працюючих повинен отримати дозвіл викладача або співробітника кафедри.
 7. У випадках виникнення короткого замикання, горіння, диму, вогню в апаратурі, пристрій необхідно негайно вимкнути з мережі та доповісти викладачеві або співробітникові кафедри. Самостійні дії по усуненню пошкодження забороняються.
 8. У випадку виходу з ладу обладнання або програмного забезпечення, що зумовлені іншими причинами, доповісти викладачеві або співробітникові кафедри. Вимикати апаратуру при цьому не дозволяється. Самостійні дії по усуненню пошкодження забороняються.
 9. Працюючі в учбових лабораторіях кафедри кібернетики ХТП несуть майнову та адміністративну відповідальність за збереження та використання обладнання, наданого для їх праці.
 10. Категорично забороняється:
 - самостійно вмикати та вимикати тумблери на щитку електроживлення;
 - несанкціоновано вмикати електрообладнання;
 - приносити та вмикати своє обладнання та пристрої, встановлювати власне програмне забезпечення;
 - залишати без нагляду увімкнені пристрої та лабораторію;
 - пересувати обладнання та комплектуючі;
 - підключати та відключати інформаційні кабелі та кабелі живлення;
 - використовувати власні носії інформації без дозволу викладачів або співробітників кафедри;
 - знаходитись в учбовій лабораторії у верхньому одязі.
- Після закінчення занять обладнання не вимикається. Робоче місце має бути прибрано працюючим та перевірене викладачем чи співробітником кафедри.

ІНСТРУКЦІЯ

про міри пожежної безпеки у лабораторіях, учбових та робочих приміщеннях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету

1. Всі студенти повинні знати та ретельно виконувати «Загальні правила пожежної безпеки в НТУУ «КПІ»».
2. Завідуючий кафедрою та завідуючий лабораторією відповідають за забезпечення пожежної безпеки всіх приміщень кафедри та за справність протипожежного обладнання та сигналізації.
3. Все електричне обладнання, яке знаходиться в лабораторіях та приміщеннях кафедри, повинно мати заземлення.
4. В усіх приміщеннях повинно дотримуватись чистоти, не займати приміщення непотрібними меблями, обладнанням та матеріалами.
5. Всі двері основних та додаткових виходів утримувати у стані швидкого відкривання.
6. Зберігання та використання горючих та легкоспалахуючих рідин у приміщеннях кафедри забороняється.
7. Ремонт електричного обладнання проводити у строгій відповідності з правилами пожежної безпеки.
8. Всі електрозахисти повинні знаходитися у закритому положенні, не займаними сторонніми предметами.
9. Коридори, проходи, тамбури, евакуаційні виходи та підходи до першочергових засобів пожежогасіння, а також комунікаційні ніші повинні бути постійно вільними, чистими та нічим не зайнятими.
10. Відповідальні особи перед закриттям приміщень повинні ретельно оглянути їх, забезпечити прибирання виробничих відходів, перевірити якість перекриття води, газу, відключити напругу електромережі, перевірити стан пожежної сигналізації та засобів пожежогасіння.
11. Від усіх приміщень мати два комплекти ключів. Один комплект здавати черговому, а інший - зберігати в певному місці, яке відомо обслуговуючому персоналу.

Студенти повинні знати та ретельно виконувати «Загальні правила техніки безпеки в НТУУ «КПІ»», про що вони ставлять свій підпис у відповідному контрольному листі з техніки безпеки перед початком проведення циклу лабораторних робіт. Студенти, які не пройшли інструктаж і не поставили підпис у контрольному листі, до роботи не допускаються.

Додаток Б

Рішення диференціальних рівнянь класичним методом в середовищі Mathcad

Приклад Б.1. Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$$20\varphi'' + 9\varphi' + \varphi = 3\mu$$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинок $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $j(0) = 0$; $j'(0) = 0$.

Для рішення застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь і всі розрахунки виконаємо в математичному пакеті Mathcad.

Лістинг розрахунків і побудов в середовищі Mathcad наведений нижче.

ORIGIN = 1

Корені характеристичного рівняння дійсні різні

Рівняння динаміки САР:

$$20\varphi'' + 9\varphi' + \varphi = 3\mu \quad (1)$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

Given

$$20p^2 + 9p + 1 = 0$$

$$\text{Find}(p) \rightarrow \left(-\frac{1}{4} \quad -\frac{1}{5} \right)$$

Записуємо вид вільної складової рішення:

$$\varphi_{\text{вп}} = C_1 e^{-0.25t} + C_2 e^{-0.2t}$$

Визначення вимушеної складової:

Вимушена складова дорівнює константі $\varphi_{\text{взм}} = C_3$

$$\varphi'' = 0 \quad \varphi' = 0 \quad \mu = 1$$

Given

$$20\varphi'' + 9\varphi' + \varphi = 3\mu$$

$$C_3 := \text{Find}(\varphi) \rightarrow 3$$

$$C_3 = 3$$

Загальний вид часової характеристики:

$$\varphi(t) = C_1 e^{-0.25t} + C_2 e^{-0.2t} + C_3 \quad (2)$$

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння (2):

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння (2):

$$\frac{d}{dt} (C_1 e^{-0.25t} + C_2 e^{-0.2t} + C_3) \rightarrow -0.25 \cdot C_1 \cdot e^{-0.25 \cdot t} + -0.2 \cdot C_2 \cdot e^{-0.2 \cdot t}$$

$$\varphi'(t) = -0.2 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot C_2 + -0.25 \cdot e^{-0.25 \cdot t} \cdot C_1 \quad (3)$$

Підставляємо $t=0$ в рівняння (2) та (3) та складаємо систему рівнянь:

$$t := 0$$

Given

$$C_1 e^{-0.25t} + C_2 e^{-0.2t} + C_3 = 0$$

$$-0.2 \cdot e^{-0.2 \cdot t} \cdot C_2 + -0.25 \cdot e^{-0.25 \cdot t} \cdot C_1 = 0$$

Визначаємо з отриманої системи C_2 і C_3 :

$$\text{coef} := \text{Find}(C_1, C_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 12.0 \\ -15.0 \end{pmatrix}$$

Отже

$$C_1 := \text{coef}_1 = 12$$

$$C_2 := \text{coef}_2 = -15$$

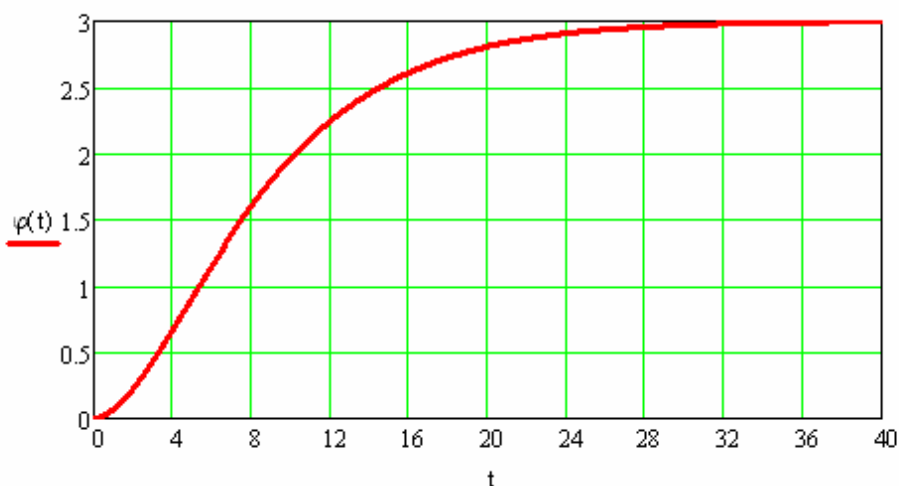
$$C_3 = 3$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння (2) та отримуємо вид часової характеристики:

$$\varphi(t) := 12e^{-0.25 \cdot t} - 15e^{-0.2 \cdot t} + 3$$

$t := 0, 0.1 \dots 40$ Задамо діапазон зміни часової координати

Будуємо часову характеристику:



Приклад Б.2. Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$$0.7\varphi'' + 1.4\varphi' + 0.7\varphi = 3.1\mu$$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинок $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $j(0) = 0$; $j'(0) = 0$.

Для рішення застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь і всі розрахунки виконаємо в математичному пакеті Mathcad.

Лістинг розрахунків і побудов в середовищі Mathcad наведений нижче.

ORIGIN = 1

Корені характеристичного рівняння кратні:

Рівняння динаміки САР:

$$0.7\varphi'' + 1.4\varphi' + 0.7\varphi = 3.1\mu \quad (1)$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

Given

$$0.7p^2 + 1.4p + 0.7 = 0$$

$$\text{Find}(p) \rightarrow (-1.0 \quad -1.0)$$

$$\varphi_{\text{вип}} = (C1 + C2t)e^{-1t}$$

Визначення вимушеної складової:

Вимушена складова дорівнює константі $\varphi_{\text{вип}} = C3$

$$\varphi'' := 0 \quad \varphi' := 0 \quad \mu := 1$$

Given

$$0.7\varphi'' + 1.4\varphi' + 0.7\varphi = 3.1\mu$$

$$C3 := \text{Find}(\varphi) \rightarrow 4.4285714285714285714$$

$$C3 = 4.429$$

Загальний вид часової характеристики:

$$\varphi(t) = (C1 + C2t)e^{-1t} + C3 \quad (2)$$

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння (2):

$$\frac{d}{dt}[(C_1 + C_2 t)e^{-1t} + C_3] \rightarrow C_2 \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot (C_1 + t \cdot C_2)$$

$$\varphi(t) = C_2 \cdot e^{-t} - e^{-t} \cdot (C_1 + t \cdot C_2) \quad (3)$$

Підставляємо $t=0$ в рівняння (2) та (3) та складаємо систему рівнянь:

$$t := 0$$

Given

$$(C_1 + C_2 t)e^{-1t} + 4.429 = 0$$

$$e^{-t} \cdot C_2 - (e^{-t}) \cdot (C_1 + t \cdot C_2) = 0$$

$$\text{coef} := \text{Find}(C_1, C_2) \rightarrow \begin{pmatrix} -4.429 \\ -4.429 \end{pmatrix}$$

Отже

$$C_1 := \text{coef}_1 = -4.429$$

$$C_2 := \text{coef}_2 = -4.429$$

$$C_3 = 4.429$$

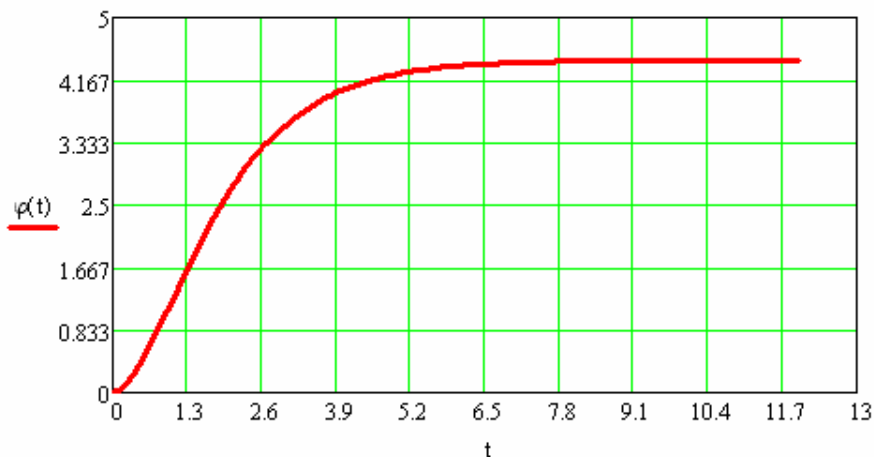
Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння (2) та отримаємо розв'язок часової характеристики:

$$\varphi(t) := [(-4.429 - 4.429t)e^{-1t} + 4.429]$$

$$t := 0, 0.1 \dots 12$$

діапазон зміни часової координати

+



Приклад Б.3. Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$$\varphi'' + 2\varphi' + 5\varphi = \mu$$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинок $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $j(0) = 0$; $j'(0) = 0$.

Для рішення застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь і всі розрахунки виконаємо в математичному пакеті Mathcad.

Лістинг розрахунків і побудов в середовищі Mathcad наведений нижче.

ORIGIN = 1

Корені характеристичного рівняння комплексні

Рівняння динаміки САР:

$$\varphi'' + 2\varphi' + 5\varphi = \mu \quad (1)$$

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

Given

$$p^2 + 2p + 5 = 0$$

$$\text{Find}(p) \rightarrow (-1 + 2i \quad -1 - 2i)$$

Записуємо вид вільної складової

$$\varphi_{\text{вп}} = (C1 \cos(2t) + C2 \sin(2t))e^{-1t}$$

Визначення вимушеної складової:

Вимушена складова дорівнює константі $\varphi_{\text{взм}} = C3$

$$\varphi'' := 0 \quad \varphi' := 0 \quad \mu := 1$$

Given

$$\varphi'' + 2\varphi' + 5\varphi = \mu$$

$$C3 := \text{Find}(\varphi) \rightarrow \frac{1}{5}$$

$$C3 = 0.2$$

+

Загальний вид часової характеристики:

$$\varphi(t) = (C1 \cos(2t) + C2 \sin(2t))e^{-1t} + C3 \quad (2)$$

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння (2):

$$\frac{d}{dt} [(C1 \cos(2t) + C2 \sin(2t))e^{-1t} + C3] \rightarrow e^{-t} \cdot (2 \cdot C2 \cdot \cos(2t) - 2 \cdot C1 \cdot \sin(2t)) - e^{-t} \cdot (C1 \cdot \cos(2t) + C2 \cdot \sin(2t))$$

$$\varphi'(t) = e^{-t} \cdot (2 \cdot C2 \cdot \cos(2t) - 2 \cdot C1 \cdot \sin(2t)) - e^{-t} \cdot (C1 \cdot \cos(2t) + C2 \cdot \sin(2t)) \quad (3)$$

Підставляємо $t=0$ в рівняння (2) та (3) та складаємо систему рівнянь:

t := 0

Given

$$(C1 \cos(2t) + C2 \sin(2t))e^{-1t} + C3 = 0$$

$$e^{-t} \cdot (2 \cdot C2 \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot C1 \cdot \sin(2 \cdot t)) - e^{-t} \cdot (C1 \cdot \cos(2 \cdot t) + C2 \cdot \sin(2 \cdot t)) = 0$$

$$\text{koef} := \text{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Отже

$$C1 := \text{koef}_1 = -0.2$$

$$C2 := \text{koef}_2 = -0.1$$

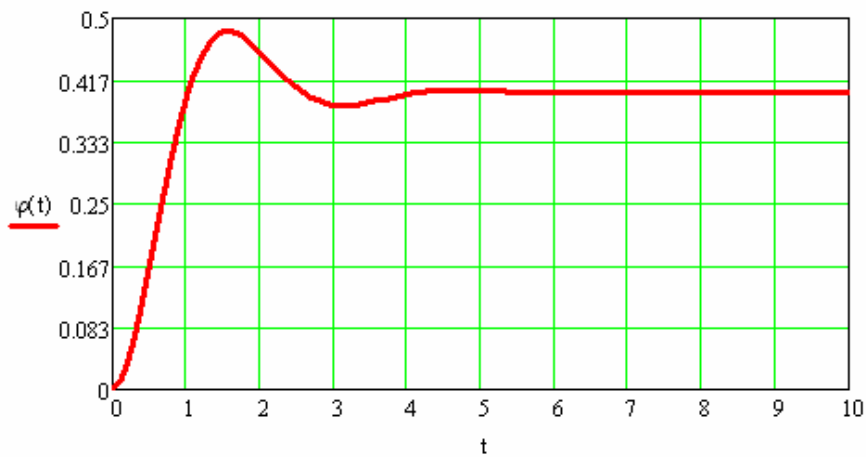
$$C3 = 0.2$$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння (2) та отримуємо розв'язок часової характеристики:

$$\varphi(t) := (-0.4 \cos(2 \cdot t) - 0.2 \sin(2 \cdot t)) \cdot e^{-t} + 0.4$$

t := 0, 0.1 .. 15

діапазон зміни часової координати



Додаток В

Алгебраїчний критерій стійкості Рауса

Застосування цього критерію вимагає формування спеціальної таблиці – таблиці Рауса (R-таблиці) з використанням коефіцієнтів характеристичного рівняння, що складається з $(n+1)$ рядків, де n – порядок системи.

Нехай характеристичне рівняння має вигляд:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Таблиця Рауса формується наступним чином:

- 1) у першому рядку в порядку зростання записуються коефіцієнти рівняння з парними індексами в порядку їх зростання (a_0, a_2, a_4, \dots);
- 2) у другому рядку – аналогічно коефіцієнти з непарними індексами (a_1, a_3, a_5, \dots);
- 3) решта елементів таблиці визначається за формулою:

$$c_{k,i} = c_{k+1,i-2} - r_i \cdot c_{k+1,i-1}$$

де $r_i = \frac{c_{1,i-2}}{c_{1,i-1}}$, i – номер рядка, k – номер стовпця.

Кількість рядків таблиці, що заповнюються, на одиницю більше порядку характеристичного рівняння.

Таблиця Рауса

r_i	$i \backslash k$	1	2	3	4
-	1	$c_{11} = a_0$	$c_{21} = a_2$	$c_{31} = a_4$...
-	2	$c_{12} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{32} = a_5$...
$r_3 = c_{11}/c_{12}$	3	$c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - r_3 c_{42}$...
$r_4 = c_{12}/c_{13}$	4	$c_{14} = c_{22} - r_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - r_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - r_4 c_{43}$...
...

Щоб система була стійка, необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти першого стовпця таблиці Рауса $c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots$ були додатними (при умові, що $a_0 > 0$). Якщо це не виконується, то система нестійка.

Критерій простий у використанні незалежно від порядку характеристичного рівняння. Він зручний для програмування на ЕОМ.

Приклади побудови годографа Михайлова в середовищі Mathcad

Приклад Г.1. Для системи, що описується диференціальним рівнянням виду: $2j^{(4)} + 1.3j''' + j'' + 5j' + 7j = 5.1m$ побудувати годограф Михайлова.

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^4 + 1.3p^3 + p^2 + 5p + 7 = 0$.

Знайдемо функцію Михайлова і виділимо дійсну і уявну складові.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Побудова годографа Михайлова

Знайдемо функцію Михайлова:

$$Fm(jw) := 2 \cdot (jw)^4 + 1.3(jw)^3 + (jw)^2 + 5(jw) + 7$$

Задамо діапазон зміни частоти:

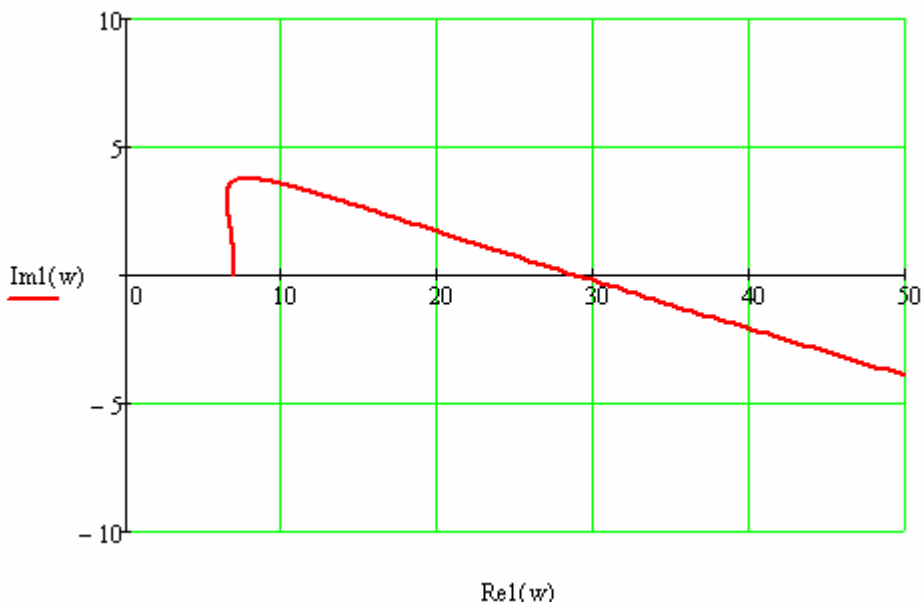
$$w := 0,0.01..5$$

Знайдемо дійсну і уявну складові:

$$Re1(w) := 2w^4 - 2 \cdot w^2 + 7$$

$$Im1(w) := w \cdot (5 - 1.3 \cdot w^2)$$

Побудуємо годограф Михайлова:



Як видно з наведеного рисунку, годограф Михайлова починається на дійсній додатній півосі, але обертається за годинниковою стрілкою і не

проходить послідовно потрібну кількість (чотири) квадрантів координатної площини. Таким чином, система нестійка.

Приклад Г.2. Для системи, що описується диференціальним рівнянням виду: $j^{(4)} + 2j''' + 16j'' + 2j' + 7j = 4.8m$ побудувати годограф Михайлова.

Запишемо характеристичне рівняння: $p^4 + 2p^3 + 16p^2 + 2p + 7 = 0$.

Знайдемо функцію Михайлова і виділимо дійсну і уявну складові.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Побудова годографа Михайлова

Знайдемо функцію Михайлова:

$$Fm(jw) := (jw)^4 + 2(jw)^3 + 16(jw)^2 + 2(jw) + 7$$

Задамо діапазон зміни частоти:

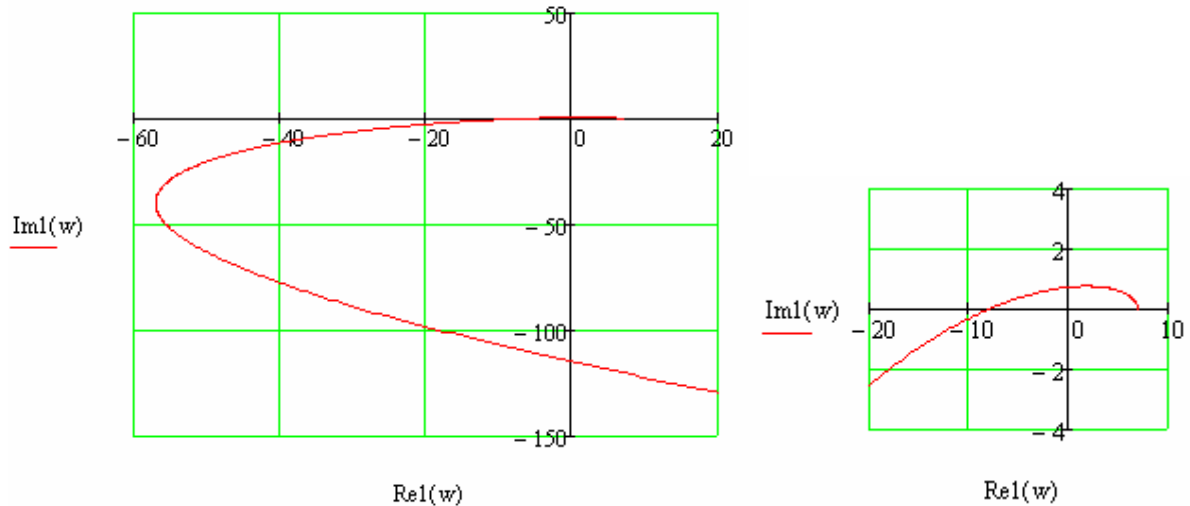
$$w := 0, 0.01 \dots 5$$

Знайдемо дійсну і уявну складові:

$$Re1(w) := w^4 - 16w^2 + 7$$

$$Im1(w) := w \cdot (-2w^2 + 2)$$

Побудуємо годограф Михайлова:



Як видно з наведеного рисунку, годограф Михайлова починається на дійсній додатній півосі, обертається проти годинникової стрілки і послідовно проходить 4 чверті координатної площини (4 – порядок характеристичного рівняння досліджуваної системи).

Таким чином, система стійка.

(Другий графік годографу побудований для наочності поведінки функції Михайлова в околу нульової частоти).