МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 6.051301 «Хімічна технологія»

Навчальне електронне видання

Затверджено Вченою радою ХТФ НТУУ «КПІ»

Київ 2013

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ: метод. вказівки і завд. до викон. розр.-граф. роботи та самостійної роботи для студ. напр. підг. 6.051301 "Хімічна технологія "/ Автори: С.Г. Бондаренко, С.В. Брановицька, О.В. Сангінова

Гриф надано Вченою радою ХТФ НТУУ "КПІ",
протокол № 4 від 27.05.2013 р.

Навчальне електронне видання

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ

методичні вказівки і завдання до виконання розрахунково-графічної роботи та самостійної роботи для студентів напряму підготовки

6.051301 "ХІМІЧНА ТЕХНОЛОГІЯ"

Автори:	Бондаренко С. Г., к.т.н., доц.
	Брановицька С. В., к.ек.н., доц.
	Сангінова О. В., к.т.н. , доц.
Відповідальний редактор:	Бондаренко С. Г., к.т.н., доц.
Рецензент:	В.І. Супрунчук, к.х.н. доц.

ЗМІСТ

Передмова

Самостійна робота студента над учбовим матеріалом з дисципліни «Обчислювальна математика та програмування» складається з наступних видів робіт: вивчення матеріалу по навчальних посібниках і підручниках; відвідування лекцій; виконання лабораторних робіт; написання модульної контрольної роботи; виконання та захист розрахунково-графічної роботи (РГР); індивідуальних консультацій; написання екзаменаційної роботи. При цьому половина запланованого часу відводиться на самостійну роботу.

Дане видання призначено для надання допомоги студентам денної форми навчання всіх професійних спрямувань напряму «Хімічна технологія» у вивченні дисципліни «Обчислювальна математика та програмування» та виконанні РГР з кредитного модуля дисципліни «Числові методи».

З цією метою у методичних вказівках наведено теоретичні відомості, необхідні для виконання роботи з ілюстрацією на конкретних прикладах. Також, методичні вказівки містять завдання для домашньої контрольної роботи, рекомендації щодо її оформлення, питання для самопідготовки, критерії оцінювання якості РГР, літературні джерела.

Головна мета виконання домашньої контрольної роботи полягає в тому, щоб сформувати у студентів систему здатностей, необхідних для застосування чисельних методів при вирішенні важливих завдань хімічної технології, що пов’язані з обробкою експериментальних даних із застосуванням персонального комп’ютера. Студент має навчитися математично формулювати поставлену задачу; виконувати порівняльний аналіз ефективності різних математичних методів, які застосовуються для розв’язання задачі апроксимації; використовувати методи теорії кореляції для обробки статистичного матеріалу; самостійно складати ефективні алгоритми та програми; використовувати сучасні комп'ютерні середовища (наприклад, MS Excel або VBA) для розв’язання поставлених задач; самостійно працювати з науково-технічною літературою; оформляти індивідуальні роботи у відповідності до вимог державних стандартів.

1. Мета і завдання розрахунково-графічної роботи

Мета роботи: Вивчити загальні поняття про методи обробки та аналізу результатів експериментальних досліджень. Набути вміння отримання апроксимуючих залежностей і оцінювання точності апроксимації; визначення рівнянь регресії і оцінки тісноти зв'язку між величинами.

Завдання на РГР

Завдання на РГР «Математична обробка експериментальних даних» складається з двох частин і передбачає.

Частина 1.

Перед виконанням завдання, що поставлене в цій частині, необхідно:

- розглянути загальний підхід до наближення функцій і вивчити апроксимацію за методом найменших квадратів (МНК);
- вивчити методи визначення виду апроксимуючої залежності, методику розрахунку коефіцієнтів обраної апроксимуючої залежності;
- розглянути визначення оцінки точності апроксимації.

З додатку А згідно зі своїм варіантом вибрати експериментально отриману табличну функцію. Варіант складається з двох цифр: перша цифра вказує на номер таблиці, в якій знаходиться завдання; друга – на номер завдання в таблиці (див. додаток А).

Для заданої табличної функції отримати апроксимуючу залежність. Для цього виконати:

1. Визначити загальний вид апроксимуючої залежності, побудувавши точковий графік заданої функції (побудову графіку виконати в середовищі MS Excel).
2. Апроксимувати задану табличну функцію поліномом першого порядку:

– визначити параметри апроксимуючої залежності (багаточлен 1-го порядку), скориставшись методом найменших квадратів;
– розрахувати значення функції у вузлових точках за допомогою отриманої апроксимуючої залежності 1-го порядку;
– за отриманими даними побудувати графік отриманої апроксимуючої функції, сумістивши його на одному малюнку з точковим графіком заданої функції (побудову графіку виконати в середовищі MS Excel);
– обчислити середню квадратичну похибку апроксимації;
– зробити висновки про точність опису експериментальних даних знайденою апроксимуючою залежністю 1-го порядку.

2. Апроксимувати задану табличну функцію поліномом другого порядку:

– визначити параметри апроксимуючої залежності (багаточлен 2-го порядку), скориставшись методом найменших квадратів;
– розрахувати значення функції у вузлових точках за допомогою отриманої апроксимуючої залежності 2-го порядку;
– за отриманими даними побудувати графік отриманої апроксимуючої функції, сумістивши його на одному малюнку з точковим графіком заданої функції (побудову графіку виконати в середовищі MS Excel);
– обчислити середню квадратичну похибку апроксимації;
– зробити висновки про точність опису експериментальних даних знайденою апроксимуючою залежністю 2-го порядку.

3. За допомогою методики, що викладена в методичних вказівках (Додаток Г. Аналітичний спосіб вибору виду апроксимуючої залежності) обрати найбільш придатну функцію для апроксимації заданої експериментальної функції. Для обраної емпіричної функції:

– визначити параметри апроксимуючої залежності (обрана емпірична функція), скориставшись методом найменших квадратів;

– розрахувати значення функції у вузлових точках за допомогою отриманої емпіричної залежності;
– за отриманими даними побудувати графік отриманої емпіричної функції, сумістивши його на одному малюнку з точковим графіком заданої функції (побудову графіку виконати в середовищі MS Excel);
– обчислити середню квадратичну похибку апроксимації;
– зробити висновки про точність опису експериментальних даних знайденою емпіричною функцією.

4. Порівняти отримані результати апроксимації експериментальної функції (п.1, п.2 і п.3) і вибрати апроксимуючу залежність, що точніше описує задану експериментальну функцію.

5. Оформити результати розрахунків згідно вимог до РГР. Зробити висновки.

Частина 2.

Перед виконанням завдання, що поставлене в цій частині, необхідно:

– вивчити поняття кореляційної залежності, умовної середньої, рівнянь регресії та коефіцієнта кореляції;
– розглянути: оцінку сили лінійного зв’язку між випадковими величинами за допомогою коефіцієнта кореляції та представлення даних у вигляді кореляційної таблиці.

З додатку Б згідно зі своїм варіантом вибрати експериментальні дані, які отримані при вивченні залежності між випадковими величинами X і Y, і, що представлені у вигляді кореляційної таблиці. Номер варіанту для другої частини завдання вказує на номер таблиці, в котрій знаходиться завдання.

На основі експериментальних даних, отриманих для вивчення залежності між випадковими величинами X і Y, і представленими у вигляді кореляційної таблиці виконати наступне:

– обробити статистичні дані, що згруповані у кореляційну таблицю, з використанням «правої» і «нижньої» допоміжних таблиць і умовних варіант;
– розрахувати вибірковий коефіцієнт кореляції та оцінити силу зв’язку між величинами Y і X;
– знайти рівняння прямих ліній регресії X на Y і X на Y;
– побудувати графіки отриманих прямих ліній регресії Y по X та X по Y (побудову графіків виконати в середовищі MS Excel);
– побудувати таблицю порівняння умовних середніх, обчислених за рівняннями регресії та за даними кореляційної таблиці, у середовищі MS Excel;[1]
– зробити висновки;
– оформити результати розрахунків згідно вимог до РГР.

2. Структура і зміст РГР

РГР «Математична обробка експериментальних даних» складається з пояснювальної записки обсягом в 25-35 сторінок формату А4. Пояснювальна записка повинна включати:

– титульний лист;
– завдання на розрахунково-графічну роботу;
– зміст;
– вступ;
– основні розділи;
– висновок;
– список літератури;

[1]За вказівкою викладача.

– додаток (при необхідності).

Титульний лист повинен бути виконаний за наведеним зразком (додаток В).

У вступі в стислій формі наводяться актуальність і мета роботи, вказуються методи розв'язання і які будуть отримані результати.

В основних розділах роботи розкривається порядок вирішення поставлених завдань, наводяться розв'язки (формули, розрахунки, таблиці, графіки), пояснення, висновки.

У заключній частині робляться висновки про результати виконаної роботи, про можливості її практичного застосування.

Список літератури повинен містити тільки цитовані джерела.

У додатку містяться матеріали, які при включенні їх в основну частину тексту пояснювальної записки захаращують її. Посилання на додаток (при його наявності) і на цитовану літературу в основному тексті обов'язкові.

Зміст складається з переліку розділів і підрозділів пояснювальної записки із зазначенням відповідних їх початку номерів сторінок.

Текст пояснювальної записки слід оформляти з дотриманням таких розмірів полів: ліве – 30 мм, праве – 10 мм, верхнє – 20 мм, нижнє – 20 мм. Сторінки пояснювальної записки нумерують арабськими цифрами. Титульний аркуш включають до загальної нумерації. На титульному аркуші номер не ставлять, на наступних сторінках номер проставляють у правому верхньому куті без виділення рисками і без крапки в кінці.

Ілюстрації (таблиці, креслення, схеми, графіки), роздруківки з ЕОМ, які розташовані на окремих сторінках, включають до загальної нумерації сторінок.

Текст основної частини пояснювальної записки ділять на розділи, підрозділи, пункти.

Заголовки розділів розміщують симетрично тексту. Перенесення слів у заголовках не допускаються. Крапку в кінці заголовка не ставлять. Якщо заголовок складається з двох речень, то їх розділяють крапкою.

Відстань між заголовком і текстом має бути не менше 15 мм. Підкреслювати заголовки не допускається.

Розділи основної частини пояснювальної записки повинні мати порядкову нумерацію в межах всієї записки і позначатися арабськими цифрами з крапкою в кінці. Зміст, вступ, висновки та список використаних літературних джерел не нумеруються. Підрозділи нумерують арабськими цифрами в межах кожного розділу. Номер підрозділу складається з номера розділу і порядкового номера підрозділу, розділених крапкою. В кінці номера підрозділу повинна стояти крапка, наприклад, 2.4. – (четвертий підрозділ другого розділу). Розв’язок задач ДКР необхідно розташовувати в порядку номерів, зазначених у завданні.

Ілюстрації (крім таблиць) позначають словом «Рис.» і нумерують послідовно арабськими цифрами в межах розділу. Номер ілюстрації повинен складатися з номера розділу і порядкового номера ілюстрації, відокремлених крапкою, наприклад, Рис.1.5. Ілюстрації мають бути розташовані так, щоб їх було зручно розглядати без повороту пояснювальної записки або з поворотом на 90° за годинниковою стрілкою. Ілюстрації розташовують після першого посилання на них.

Ілюстрації повинні мати найменування. При необхідності ілюстрації забезпечують пояснюючими надписами. Найменування розміщують над ілюстрацією, пояснюючі дані під ілюстрацією, номер малюнка під пояснюючими даними.

Таблиці нумерують послідовно арабськими цифрами в межах розділу і дають їм назву. З вирівнюванням по правому краю над відповідним заголовком таблиці розміщують напис «Таблиця» із зазначенням її номера, який повинен складатися з номера розділу і порядкового номера таблиці, розділених крапкою, наприклад, Таблиця 1.3. Таблиці розташовують після першого посилання на них.

Формули в пояснювальній записці нумерують арабськими цифрами в межах розділу. Номер формули повинен складатися з номера розділу і порядкового номера формули в розділі, розділених крапкою. Номер формули вказують з правої сторони аркуша в круглих дужках, наприклад, (2.7). Пояснення значень символів і числових коефіцієнтів слід приводити безпосередньо під формулою в тій же послідовності, в якій вони дані у формулі. Перший рядок пояснення починають із слова «де» без двокрапки.

Приклад:

Розрахунок критерію Рейнольдса здійснюється за формулою:

$$\mathrm{Re} = \frac{wdr}{m},$$

де w – швидкість потоку; d – лінійний розмір; r – щільність; m – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Посилання в тексті на літературні джерела слід виконувати зазначенням порядкового номера джерела за списком джерел, виділеного квадратними дужками, наприклад, [7], [2,5,9],[3-8].

Додатки оформлюють як продовження роботи на наступних її сторінках або у вигляді окремої частини, розміщуючи їх у порядку появи посилань у тексті роботи.

Кожен додаток необхідно починати з нового аркуша. Додаток повинен мати заголовок, надрукований вгорі малими літерами з першої великої симетрично відносно тексту сторінки. В правому верхньому куті рядка над заголовком малими літерами з першої великої літери повинно бути надруковано слово Додаток і через пропуск велика літера, що позначає додаток. Додатки слід позначати послідовно великими літерами української абетки, за винятком літер Ґ, Є, З, І, Ї, Й, О, Ч, Ь (наприклад, Додаток Б). Якщо додаток один, то він позначається, як Додаток А.

Додатки повинні мати спільну з основним текстом наскрізну нумерацію сторінок.

Ілюстрації, таблиці, що є у тексті додатку, слід нумерувати в межах кожного додатку арабськими цифрами, наприклад, Рис.Д.3 – третій рисунок додатку Д, Таблиця А.3 – третя таблиця додатку А. Якщо в додатку одна ілюстрація або одна таблиця, то їх нумерують, наприклад, Рис. А.1, Таблиця А.1.

У посиланнях у тексті додатку на ілюстрації, таблиці рекомендується писати: на рис. А.2, в таблиці Д.3.

Всі додатки включають у зміст, вказуючи номер, заголовок і сторінки з яких вони починаються.

Програмна реалізація частин РГР

1. При рішенні поставленого **завдання 1** всі розрахунки і побудова графіків виконується в середовищі MS Excel.
2. При цьому, для **завдання 1** (**п.2**)виконується його програмна реалізація, що передбачає розробку програмного модуля в середовищі VBA MS Excel, який реалізує рішення системи рівнянь (наприклад, з використанням метода Крамера) для розрахунку коефіцієнтів апроксимуючої функції (багаточлен 2-го порядку) і обчислення середньої квадратичної похибки апроксимації.
3. При рішенні поставленого **завдання 2** всі розрахунки і побудова графіків виконується в середовищі MS Excel.

Літературні джерела для виконання основних розділів РГР

Матеріали, необхідні для вивчення питань, що зв'язані з апроксимацією за МНК наведені в літературних джерелах [1,2,5].

Питання теорії лінійної кореляції наведені в книгах [1,2,5].

Аналітичний спосіб вибору виду апроксимуючої залежності розглядається в роботах [1,2,5].

3. Критерії оцінювання РГР

Захист ДКР відбувається на 15 тижні. Робота подається викладачу до перевірки не пізніше, ніж за тиждень до захисту. На 12 тижні (перед здачею ДКР на перевірку) результати розрахунків демонструються на комп'ютері викладачу; без демонстрації розрахунків у середовищі MS Excel робота на перевірку не приймається.

Під час захисту студент має вміти чітко формулювати постановку задачі, розкрити суть кожного з використаних методів, аргументовано обирати метод розрахунку для подібної задачі, оцінити якість отриманих результатів.

Оцінка за ДКР має 3 складові. Перша характеризує якість пояснювальної записки та графічного матеріалу, друга – якість виконання розрахунків, обґрунтування методів розрахунку, наявність порівняльного аналізу ефективності різних математичних методів та оцінювання точності отриманих результатів; третя складова характеризує якість захисту студентом роботи, ступінь володіння матеріалом, аргументованість рішень, уміння захищати свою думку.

За результатами захисту студент отримує оцінку

«відмінно», якщо виконані всі вимоги до роботи, студент відповів на всі теоретичні запитання та зміг розв'язати подібні задачі під час захисту;

«добре», якщо виконані майже всі вимоги до роботи, або є несуттєві помилки, під час захисту студент відповів на всі теоретичні запитання та зміг розв'язати подібні задачі;

«задовільно», є недоліки щодо виконання вимог до роботи і певні помилки, під час захисту студент відповів не на всі теоретичні запитання, але зміг розв'язати подібні задачі;

«незадовільно», не відповідає вимогам до «задовільно».

За несвоєчасне, пізніше ніж на тиждень, подання ДКР, студент отримує штрафні бали.

Норми бального оцінювання ДКР зазначено у РСО.

4. Задача апроксимації за методом найменших квадратів

4.1. Наближення функцій

Задача про наближення ставиться в такий спосіб: дану функцію $f(x)$ потрібно приблизно замінити (апроксимувати) узагальненим багаточленом

$$Q(x) = a_0 \cdot j_0(x) + a_1 \cdot j_1(x) + \mathbf{K} + a_m \cdot j_m(x), \qquad (4.1)$$

де $a_0, \mathbf{K}, a_m$ – постійні коефіцієнти, $\{j_0(x), j_1(x), \mathbf{K}, j_m(x)\}$– основна система функцій, які є досить гладкими (наприклад, неперервно диференційованими) так, щоб відхилення, у певному розумінні, функції $f(x)$ від $Q(x)$ на заданій множині $X = \{x\}$ було найменшим. Цього можна досягти шляхом належного підбора коефіцієнтів $a_i (i = 0, 1, \mathbf{K}, m)$. При цьому багаточлен $Q(x)$ називається апроксимуючим.

Якщо множина X складається з окремих точок $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$, то наближення називається точковим; якщо ж X є відрізок $a \le x \le b$ – то інтегральним.

Для практики дуже важливий випадок, коли основна система функцій $\{j_i(x)\}$ являє собою послідовність цілих невід'ємних степенів змінної x, тобто

$$j_0(x) = 1, \quad j_1(x) = x, \quad j_2(x) = x^2, \mathbf{K}, \quad j_m(x) = x^m \quad .$$

У цьому випадку функція $Q(x)$ є звичайними багаточленом степеня m:

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \mathbf{K} + a_m \cdot x^m . \qquad (4.2)$$

4.2. Апроксимація за методом найменших квадратів

Нехай функція $y = f(x)$ задана у табличному вигляді своїми значеннями $\mathbf{x_i}$, $\mathbf{y_i}$ (наприклад, результати експерименту):

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Потрібно знайти функцію ŷ = φ(x, a_0, a_1, a_2,…, a_m), котра би в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приймала би значення $\hat{y}_1$, $\hat{y}_2$, $\hat{y}_3$, …, $\hat{y}_n$, які би були дуже близькими до значень $y_1, y_2, \ldots, y_n$, де a_0, a_1, a_2,…, a_m – коефіцієнти, які потрібно визначити. При цьому, $m \le n$.

Відповідно до методу найменших квадратів за міру відхилення апроксимуючої функції ŷ від даної функції на множині точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ приймають величину S, яка повинна прийняти мінімальне значення:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \min \text{ (або } S = \sum_{i=1}^{n} [\hat{y}_i - f(x_i)]^2 = \min . \qquad (4.3)$$

Функцію φ(x, a_0, a_1, a_2,…, a_m) називають апроксимуючою або наближеною, а функцію $y = f(x)$ – апроксимуємою.

Якщо апроксимуючою функцією є багаточлен $Q_m(x)$, то формула (4.3) набуває вигляду:

$$S = \sum_{i=1}^{n} [Q(x_i) - f(x_i)]^2 = \min . \qquad (4.4)$$

З наведеного формулювання виходить, що вирішення задачі апроксимації можна поділити на два етапи:

1 етап – визначення виду апроксимуючої функції.

2 етап – визначення значень коефіцієнтів обраної апроксимуючої функції.

4.3. Вибір виду апроксимуючої функції

Для визначення виду апроксимуючої функції необхідно експериментальні точки нанести на графік і провести наближену криву таким чином, щоб вузлові точки були рівномірно розташовані навколо неї, як показано на рис.4.1. Потім ця крива порівнюється з графіками відомих функцій (показниковою, логарифмічною, степеневою тощо).

В якості апроксимуючої функції обираємо ту, графік якої має вид побудованого.

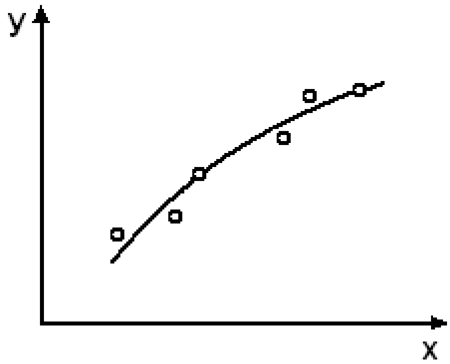

Рис. 4.1 Графічний вибір апроксимуючої функції

Існує також аналітичний метод вибору апроксимуючої функції, що базується на використанні деяких аналітичних критеріїв для вибору загального виду емпіричної формули. Метод розглянутий в Додатку Г.

4.4. Визначення значень коефіцієнтів обраної апроксимуючої функції

Для побудови багаточлена $Q_m(x)$ потрібно підібрати коефіцієнти $a_0, a_1, \mathbf{K}, a_m$ так, щоб величина S була найменшою.

Використовуючи необхідні умови екстремуму функції декількох змінних (необхідною умовою екстремуму функції декількох змінних є рівність нулю всіх часткових похідних в точці екстремуму по всім невідомим), отримуємо так звану нормальну систему для визначення коефіцієнтів $a_i (i = 0, 1, \mathbf{K}, m)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Розв'язок системи виконується відомими методами. Після підстановки знайдених коефіцієнтів в апроксимуючу функцію отримаємо конкретний вид апроксимуючої залежності.

Після визначення апроксимуючої залежності визначають середнє квадратичне відхилення (похибку апроксимації) за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}},$$

n – кількість експериментальних точок.

Розглянемо застосування методу найменших квадратів для випадків, коли в якості апроксимуючої функції обрані багаточлени першого і другого порядків.

4.5. Лінійна апроксимація

Нехай функція $y = f(x)$ задана своїми значеннями

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \; \ldots, \; y_n = f(x_n).$$

Для апроксимації заданої функції обрано багаточлен першого степеня

$$Q_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x. \tag{4.6}$$

Потрібно знайти такі значення коефіцієнтів a_0, a_1 обраної апроксимуючої функції, щоб величина S була найменшою:

$$S = \sum_{i=1}^{n}[Q_1(x_i) - f(x_i)]^2. \tag{4.7}$$

З урахуванням (4.6) запишемо (4.7) у вигляді

$$S = \sum_{i=1}^{n}[a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i]^2. \tag{4.8}$$

Нормальна система для визначення коефіцієнтів буде наступною:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i = 0. \end{cases} \qquad (4.9)$$

Зробивши найпростіші перетворення, одержимо:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Розв'язавши систему (4.10) відомими методами (формули Крамера, метод Гауса й ін.), знайдемо коефіцієнти a_0 та a_1 і таким чином, отримаємо конкретний вигляд апроксимуючого багаточлена першого порядку $Q_1(x)$.

<u>**Приклад 4.1.**</u> Результати вимірювання розчинності S азотно-натрієвої солі залежно від температури t представлені наступною таблицею:

t, °C	0	4	10	15	21	29	36	51	68
S, г/ 100 г	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Знайти апроксимуючу функцію у вигляді $S = a_0 + a_1 t$.

<u>Розв'язок.</u> На основі табличних даних, прийнявши, що $x = t$ і $y = S$, будемо обчислювати коефіцієнти при невідомих a_0, a_1 й вільні члени в системі (4.10), користуючись таблицею 4.1.

Таблиця 4.1.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	0	66,7	0	0
2	4	71,0	16	284
3	10	76,3	100	763
4	15	80,6	225	1209
5	21	85,7	441	1799,7
6	29	92,9	841	2694,1
7	36	99,4	1296	3578,4
8	51	113,6	2601	5793,6
9	68	125,1	4624	8506,8
$\sum$	234	811,3	10144	24628,6

За даними таблиці 4.1 запишемо нормальну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 9a_0 + 234a_1 = 811{,}3 \\ 234a_0 + 10144a_1 = 24628{,}6. \end{cases} \tag{4.11}$$

Знайдемо a_0 й a_1 за формулами Крамера:

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 811{,}3 & 234 \\ 24628{,}6 & 10144 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 234 \\ 234 & 10144 \end{vmatrix}} = 67{,}51; \qquad a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 811{,}3 \\ 234 & 24628{,}6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 234 \\ 234 & 10144 \end{vmatrix}} = 0{,}87.$$

Отже, шуканий багаточлен має вигляд:

$$S = 67{,}51 + 0{,}87 \cdot t. \tag{4.12}$$

Порівняємо вихідні значення для y з відповідними значеннями $\bar{y}$, отриманими з рівняння (4.12). Відповідні результати наведені у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2.

i	x_i	y_i	$\bar{y}_i$	$\bar{y}_i - y_i$
1	0	66,7	67,51	0,81
2	4	71,0	70,99	-0,01
3	10	76,3	76,21	-0,09
4	15	80,6	80,56	-0,04
5	21	85,7	85,78	0,08
6	29	92,9	92,74	-0,16
7	36	99,4	98,83	-0,57
8	51	113,6	111,88	-1,72
9	68	125,1	126,67	1,57

Розрахуємо середнє квадратичне відхилення за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y}_i)^2}{n-1}}, \tag{4.13}$$

Незначні розбіжності між y_i та $\bar{y}_i$, а також значення середньої квадратичної похибки $\sigma = 0{,}8976$ свідчать, що отримана залежність достатньо точно описує експериментальні дані.

4.6. Квадратична апроксимація

На практиці нелінійний взаємозв'язок двох змінних x і y часто апроксимують багаточленом другого степеня

$$Q_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, \tag{4.14}$$

де a_0, a_1, a_2 – параметри, що підлягають визначенню.

Відповідно до методу найменших квадратів, ці параметри обчислюються із мінімуму критерію

$$S = \sum_{i=1}^{n} [Q_2(x_i) - f(x_i)]^2 . \tag{4.15}$$

де $y_i = f(x_i)$ – значення даної функції $y = f(x)$ в точках $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$.

Тоді з урахуванням (4.14) запишемо (4.15) у вигляді

$$S = \sum_{i=1}^{n} [a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 - y_i]^2 . \tag{4.16}$$

За необхідною умовою екстремуму функції декількох змінних отримаємо нормальну систему наступного виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 - y_i) \cdot x_i^2 = 0, \end{cases} \tag{4.17}$$

яка після перетворень прийме вид:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i . \end{cases} \tag{4.18}$$

Розв’язавши систему (4.18) і підставивши коефіцієнти a_0, a_1, a_2 в багаточлен другого степеня (4.14), знайдемо конкретний вид апроксимуючого багаточлена.

<u>**Приклад 4.2**</u>**.** Залежність мольної теплоємності ацетилену від температури виражається наступними експериментальними даними:

T, °C	300	400	500	600	700	800	900	1000
C_p, Дж/(моль град)	9,91	11,07	12,13	13,04	13,82	14,51	15,10	15,63

Знайти апроксимуючу функцію у вигляді

$$C_p = a_0 + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 . \tag{4.19}$$

<u>Розв’язок</u>. Для обчислення коефіцієнтів нормальної системи складемо таблицю 4.3, прийнявши $x = T$ і $y = C_p$.

Таблиця 4.3.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
1	300	9,91	9,00·104	2,70·107	8,100·109	2973	891900
2	400	11,07	1,60·105	6,40·107	2,560·1010	4428	1771200
3	500	12,13	2,50·105	1,25·108	6,250·1010	6065	3032500
4	600	13,04	3,60·105	2,16·108	1,296·1011	7824	4694400
5	700	13,82	4,90·105	3,43·108	2,401·1011	9674	6771800
6	800	14,51	6,40·105	5,12·108	4,096·1011	11608	9286400
7	900	15,10	8,10·105	7,29·108	6,561·1011	13590	12231000
8	1000	15,63	1,00·106	1,00·109	1,000·1012	15630	15630000
Суми	5200	105,21	3,80·106	3,016·109	2,5316·1012	71792	54309200

З урахуванням даних таблиці 4.3. нормальна система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 8a_0 + 5200a_1 + 3{,}80 \cdot 10^6 a_2 = 105{,}21 \\ 5200a_0 + 3{,}80 \cdot 10^6 a_1 + 3{,}016 \cdot 10^9 a_2 = 71792 \\ 3{,}80 \cdot 10^6 a_0 + 3{,}016 \cdot 10^9 a_1 + 2{,}5316 \cdot 10^{12} a_2 = 54309200. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, знайдемо коефіцієнти:

$a_0 = 9{,}928;\qquad a_1 = 1{,}197;\qquad a_2 = -0{,}0552$.

Отже, апроксимуючий багаточлен має вигляд:

$$y = 5{,}84 + 15{,}28 \cdot 10^{-3} x - 5{,}52 \cdot 10^{-6} x^2 , \qquad (4.20)$$

або, повертаючись до вихідних позначень, отримаємо

$$C_p = 5{,}84 + 15{,}28 \cdot 10^{-3} T - 5{,}52 \cdot 10^{-6} T^2 . \qquad (4.21)$$

Порівняємо вихідні значення для C_p з відповідними значеннями $\overline{C}_p$, отриманими з рівняння (4.21). Відповідні результати наведені у табл. 4.4.

Таблиця 4.4.

i	T_i	C_p	$\overline{C}_p$	$\overline{C}_p - C_p$	
1	300	9,91	9,93	0,017	
2	400	11,07	11,07	-0,001	
3	500	12,13	12,10	-0,030	
4	600	13,04	13,02	-0,019	
5	700	13,82	13,83	0,011	
6	800	14,51	14,53	0,021	
7	900	15,10	15,12	0,021	
8	1000	15,63	15,60	-0,030	σ =0,022

Незначні розбіжності між C_p і $\overline{C}_p$ та значення середньої квадратичної похибки свідчать, що отримана залежність достатньо точно описує експериментальні дані.

5. Лінійна кореляція

Під час дослідження хімічних явищ і процесів часто потрібно аналізувати зв'язок між різними кількісними чи якісними ознаками. Дві випадові величини можуть бути пов'язані функціональною чи статистичною залежністю або бути незалежними. За функціонального зв'язку кожному значенню однієї величини (аргументу) відповідає цілком визначене значення іншої величини (функції).

Статистичною називають залежність, за якої:

1) кожному значенню однієї з величини відповідає ряд розподілу іншої;

2) зі зміною однієї величини закономірно змінюються статистичні характеристики рядів розподілення іншої величини: положення рядів розподілу, розсіювання, міра асиметрії тощо.

Статистичну залежність називають **кореляційною**, якщо у разі зміни однієї з величин змінюється середнє значення іншої. Отже, кореляційна залежність – це окремий випадок залежності статистичної. Будь-яка кореляційна залежність є статистичною, але не кожна статистична залежність буде кореляційною.

Нехай дослідні дані, отримані для вивчення залежності між випадковими величинами X і Y такі, що кожному значенню X відповідає кілька значень Y (наприклад, при $X = x$ величина Y набула значень $y_1, y_2, \cdots, y_k$) і навпаки, кожному значенню Y відповідає кілька значень X.

Функціональну залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x називають кореляційною залежністю Y від X:

$$\bar{y}_x = f(x). \tag{5.1}$$

Рівняння (5.1) називають рівнянням регресії Y на X (або Y по X); функцію $f(x)$ – регресією Y на X (Y по X), а її графік – лінією регресії Y на X (Y по X).

Функціональну залежність умовної середньої $\bar{x}_y$ від у називають кореляційною залежністю X від Y:

$$\bar{x}_y = \varphi(y). \tag{5.2}$$

Рівняння (5.2) називають рівнянням регресії X на Y (X по Y); функцію $\varphi(y)$ – регресією X на Y (X по Y), а її графік – лінією регресії X на Y (X по Y).

Наявність (чи відсутність) зв’язку між випадковими величинами X та Y, а також силу (тісноту) зв’язку характеризують коефіцієнтом кореляції r_{xy}. Коефіцієнт кореляції – безрозмірна величина (причому $|r_{xy}|<=1$), яку використовують для оцінки тісноти тільки лінійного зв’язку між величинами X і Y. Чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв’язок сильніше; чим ближче значення $|r_{xy}|$ до нуля, тим зв’язок слабкіше. Якщо $r_{xy}>0$, говорять про додатну кореляцію (у разі зростання однієї з величин інша має тенденцію у середньому до зростання); якщо $r_{xy}<0$, – про від’ємну кореляцію (за зростання однієї з величин інша має тенденцію у середньому до спадання).

Нехай випадкові величини пов’язані лінійною кореляційною залежністю. Необхідно за експериментальними даними знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y та оцінити силу кореляційного зв’язку. При цьому, в залежності від отриманих даних можливі наступні випадки.

Випадок не згрупованих даних. В найпростішому випадку в результаті незалежних **n** дослідів була отримана сукупність пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n). При цьому, кожна пара спостерігалась тільки по одному разу. В даному випадку для визначення рівнянь прямих ліній регресії застосовують апроксимацію отриманих даних лінійною залежністю [1, 2].

Випадок згрупованих даних. Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли в $\boldsymbol{n}$ незалежних дослідах одне і те саме значення x спостерігалося $\boldsymbol{n_x}$, разів, значення y – $\boldsymbol{n_y}$ разів, пара чисел (x, y) –$\boldsymbol{n_{xy}}$разів. Такі дані групують, тобто підраховують частоти $\boldsymbol{n_x}$, $\boldsymbol{n_y}$, $\boldsymbol{n_{xy}}$і подають у вигляді таблиці, яку називають кореляційною.

Приклад 5.1. У $\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{n} = 16)$ незалежних дослідах були отримані такі дані, що виражають залежність густини водяних розчинів бромистоводнєвої кислоти HBr вид її концентрації при 25°C:

Концентрація HBr, % (мас.)	15	15	15	15	16	16	16	16
Густина, г/см^3	1,11	1,12	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,12
Концентрація HBr, % (мас.)	17	17	17	17	18	18	18	18
Густина, г/см^3	1,13	1,12	1,13	1,13	1,14	1,13	1,13	1,14

Представити ці дані у вигляді кореляційної таблиці.

Розв'язок. На перетині рядків і стовпців (табл. 5.1) знаходяться частоти $\boldsymbol{n_{xy}}$. Наприклад, частота 3, що знаходиться на перетині першого рядка і першого стовпця, вказує, що пара чисел (15; 1.11) спостерігалася в 16 дослідах три рази.

Таблиця 5.1. Кореляційна таблиця

Значення y_i (густина, г/см^3)	Значення x_i(концентрація HBr, % (мас.))				
	15	16	17	18	n_y
1,11	3				3
1,12	1	3	1		5
1,13		1	3	2	6
1,14				2	2
n_x	4	4	4	4	n = 16

В останньому стовпці записані суми частот рядків, що вказують, скільки разів спостерігалось значення y_i, випадкової величини Y при різних значеннях випадкової величний X. В останньому рядку записані суми частот стовпців, що вказують, скільки разів значення x_i величини X спостерігалось при різних значеннях величини Y.

У нижньому правому куті записана сума всіх частот (загальна кількість проведених дослідів $\boldsymbol{n}$). Очевидно, що $\sum n_x = \sum n_y = n$.

Для нашого приклада $\sum n_x = 4+4+4+4 = 16$ і $\sum n_y = 3+5+6+2 = 16$.

5.1. Визначення вибіркового рівняння прямої лінії регресії за згрупованими даними

Коли кореляційна таблиця побудована (чи задана заздалегідь), можна знаходити рівняння прямої ліній регресії та оцінити силу кореляційного зв'язку за допомогою вибіркового коефіцієнта кореляції.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X, отримане за згрупованими даними, матиме вигляд

$$\bar{y}_x = r_{yx}x + b \qquad (5.3)$$

де ρ_{yx} – вибірковий коефіцієнт регресії Y на X, b – постійний коефіцієнт.

Тут використовується поняття умовної середньої $\bar{y}_x$.

Введемо наступні позначення:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n};\quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};\quad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}. \qquad (5.4)$$

Звідси:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}n;\quad \sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}n;\quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \overline{x^2}n \qquad (5.5)$$

Враховуючи те, що кожна пара чисел (x, y) спостерігається у n дослідах n_{xy} разів ($\sum xy = \sum n_{xy}xy$), формули для визначення ρ_{yx} і b можна записати у вигляді:

$$r_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)};\qquad b = \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy}xy}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \qquad (5.6)$$

Оскільки $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = \sigma_x^2$, то

$$r_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{ns_x^2} \qquad (5.7)$$

Помноживши попередній вираз на σ_x/σ_y, отримаємо вираз для вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r_в = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{ns_x s_y}, \qquad (5.8)$$

де σ_x та σ_y – середнє квадратичне відхилення х та у відповідно.

Рівняння регресії Y на X будемо шукати у вигляді [1, 4]:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_в\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \qquad (5.9)$$

А рівняння регресії X на Y:

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_в \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \qquad (5.10)$$

<u>Приклад 5.2.</u> За дослідними даними знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y та оцінити силу лінійного кореляційного зв'язку.

y \ x	11--13	13--15	15--17
5--7	2		
7--9	1	3	1
9--11		1	2

<u>Розв'язок:</u>

Шукатимемо рівняння регресії у вигляді (5.9). Спочатку обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції $r_в$.

Розрахунки виконані у середовищі MS Excel (табл. 5.2). Вихідні дані занесені у комірки A1:D4.Результати обчислень зручно записувати в дві допоміжні таблиці, що розташовані праворуч (E1:K5) і знизу (A5:E11) від заданої кореляційної таблиці.

За значення y_j, величини Y візьмемо середини інтервалів: y_1 =6 (середина інтервалу 5-7), y_2= 8 (середина інтервалу 7-9), y_3 =10 (середина інтервалу 9-11). Запишемо ці значення в комірки F2:F4 у правій таблиці.

Аналогічно визначатимемо значення x_i, величини X: x_1 = 12; x_2 = 14; x_3= 16 та запишемо їх у комірки B6:D6 нижньої таблиці.

Таблиця 5.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x / y	11--13	13--15	15--17	n_y	y	v	n_y*v	n_y*v^2	q	q*v
2	5--7	2			2	6	-1	-2	2	-2	2
3	7--9	1	3	1	5	8	0	0	0	0	0
4	9--11		1	2	3	10	1	3	3	2	2
5	n_x	3	4	3	**10**			1	5		**4**
6	**x**	12	14	16							
7	**u**	-1	0	1							
8	n_x*u	-3	0	3	0						
9	n_x*u^2	3	0	3	6						
10	**t**	-2	1	2							
11	**t*u**	2	0	2	**4**						

Щоб спростити обчислення, перейдемо від початкових варіант x_iта y_j ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$) до умовних варіант u і v:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \qquad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де h_1, h_2 – інтервали: h_1=2 ($h_1 = x_{i+1} - x_i$, наприклад, h_1=14-12=2), h_2=2 ($h_2 = y_{i+1} - y_i$, наприклад, h_2=13-11=2). У якості C_1 візьмемо варіанту $x = 14$, що є значенням x при найбільшій частоті – $\boldsymbol{n_x}$= 4 (тобто C_1=14), а як C_2візьмемо варіанту $y = 8$, що є значенням y при найбільшій частоті – $\boldsymbol{n_y}$= 5 (тобто C_2=8). Знайдені у такий спосіб умовні варіанти u_i і v_j запишемо відповідно в рядок u (B7:D7) нижньої таблиці й у стовпець v (G2:G4) правої таблиці.

Елементи рядку $n_x u$ дорівнюють добуткам відповідних елементів рядків n_x і u; елементи стовпця $n_y v$ дорівнюють добуткам відповідних елементів стовпців n_y і v; аналогічно знаходяться усі елементи $n_x u^2$ и $n_y v^2$.

Кожний елемент стовпця q дорівнює сумі добутків частот $\boldsymbol{n_{uv}}$ (тобто $\boldsymbol{n_{xy}}$), котрі знаходяться у відповідному рядку кореляційної таблиці на відповідні елементи рядка u. Наприклад, значення комірки J2=B2*G2= - 2, тобто $2\cdot(-1)=-2$; значення комірки J3=B3*G2+C3*G3+D3*G4= -5, а саме $1\cdot(-1)+3\cdot 0+1\cdot 1=0$; J4=C4*G3+G4*D4 = 2: $1\cdot 0+2\cdot 1=2$.

У рядку t кожен елемент дорівнює сумі добутків частот $\boldsymbol{n_{uv}}$ (тобто $\boldsymbol{n_{xy}}$), які знаходяться у відповідному стовпці кореляційної таблиці, на відповідні елементи стовпця v. Наприклад, значення комірки B10=B2*B7+B3*C7= - 2, тобто 2·(- 1)+1·0 = -2; значення комірки C10=C3*C7+C4*D7: 3·0+1·1=1; D10=D3*C7+D4*D7=2: 1·0+2·1=2.

В останньому стовпці qv кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів стовбців q і v, а в останньому рядку tu кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів рядків t і u. Рівність сум $\sum qv=\sum tu=4$ використовують для контролю правильності обчислень.

Далі послідовно знаходимо:

$$\bar{u}=\frac{\sum n_x u}{n}=\frac{0}{10}=0 \qquad \bar{v}=\frac{\sum n_y v}{n}=\frac{1}{10}=0{,}1,$$

де $\bar{u}$, $\bar{v}$ – середні умовних варіант.

Середні квадратичні відхилення умовних варіант:

$$s_u=\sqrt{\frac{\sum n_x u^2}{\sum n_x}-(\bar{u})^2}=\sqrt{\frac{6}{10}-(0)^2}=0{,}775;$$

$$s_v=\sqrt{\frac{\sum n_y v^2}{\sum n_y}-(\bar{v})^2}=\sqrt{\frac{5}{10}-(0{,}1)^2}=0{,}7.$$

З урахуванням того, що $\sum qv=\sum tu=\sum n_{uv}uv=4$, знаходимо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_B=\frac{\sum n_{uv}uv-n\bar{u}\bar{v}}{n s_u s_v}=\frac{4-10\cdot 0\cdot 0{,}1}{10\cdot 0{,}775\cdot 0{,}7}=0{,}738.$$

Значення вибіркового коефіцієнту $r_B=0{,}738$ вказує, що зв'язок між випадковими величинами досить сильний.

Тепер знаходимо наступні величини:

- середні значення:

$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1 = 0 \cdot 2 + 14 = 14$;

$\bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2 = 0{,}1 \cdot 2 + 8 = 8{,}2$;

- середні квадратичні відхилення:

$s_x = s_u h_1 = 0{,}775 \cdot 2 = 1{,}549$;

$s_y = s_v h_2 = 0{,}7 \cdot 2 = 1{,}4$.

Підставивши знайдені величини в рівняння (5.9)

$$\bar{y}_x - 8{,}2 = 0{,}738 \frac{1{,}4}{1{,}549}(x - 14) \qquad (5.11)$$

знайдемо рівняння лінії регресії Y на X: $y_x = 0{,}667 \cdot x - 1{,}13$.

Аналогічно можна знайти рівняння лінії регресії X на Y, якщо скористатись рівнянням (5.10).

Порівняємо умовні середні розраховані за рівнянням регресії з даними кореляційної таблиці:

Таблиця 5.4 Порівняння даних

Значення x_i	Розрахунок за рівнянням $y_x = 0{,}667 \cdot x - 1{,}13$	Значення з кореляційної таблиці	Різниця розрахункових і табличних даних
12	6,867	$\bar{y}_{12} = \frac{2 \cdot 6 + 1 \cdot 8}{2+1} 6{,}667$	0,200
14	8,200	$\bar{y}_{14} = \frac{3 \cdot 8 + 1 \cdot 10}{3+1} = 8{,}5$	-0,300
16	9,533	$\bar{y}_{16} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 10}{2+1} = 9{,}333$	0,200

Аналізуючи дані, що наведені в табл. 5.4, можна побачити, що умовні середні відрізняються незначно. Різниця розрахункових і табличних даних вказує на достатню точність розрахунків за знайденим рівнянням регресії Y на X.

<u>Приклад 5.3.</u> На підставі виконаних протягом тривалого часу аналізів вмісту металу (X) у руді, що надходить на переробку, і даних щодо відсотка добування металу (Y) під час цехової обробки руди складено кореляційну таблицю (табл. 5.5). Знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X.

<u>Розв'язок</u>.

Шукатимемо рівняння регресії у вигляді (5.9). Спочатку обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції r_B. Результати запишемо в дві допоміжні таблиці, що розташовані праворуч і знизу від заданої кореляційної таблиці («права» і «нижня» таблиці). За значення y_i, величини Y візьмемо середини інтервалів: y_1 =74 (середина інтервалу 72-76). y_2= 78 (середина інтервалу 76-80) і т. д. Запишемо ці значення в стовпець у правій таблиці.

Аналогічно визначатимемо значення x_i, величини X: x_1 = 6; x_2 = 8; x_3 = 10 і т. д. та запишемо їх у рядок x нижньої таблиці.

Щоб спростити обчислення, перейдемо від початкових варіант x_iі y_j (i = 1,2,…,7 , j = 1,2,…,7) до умовних варіант u і v:

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \qquad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2},$$

де h_1, h_2 – інтервали: h_1=2 ($h_1 = x_{i+1} - x_i$, наприклад, h_1=7-5=2),

h_2=4 ($h_2 = y_{i+1} - y_i$, наприклад, h_2=76-72=4). У якості C_1візьмемо варіанту x = 12, що є значенням x при найбільшій частоті – $\boldsymbol{n_x}$= 20 (тобто C_1=12), а як C_2візьмемо варіанту y = 86, що є значенням y при найбільшій частоті – $\boldsymbol{n_y}$= 16 (тобто C_2=86). Знайдені у такий спосіб умовні варіанти u_i і v_j запишемо відповідно в рядок u нижньої таблиці й у стовпець v правої таблиці.

Таблиця 5.5. Кореляційна і допоміжні таблиці («права» та «нижня»).

Y\X	5-7	7-9	9-11	11-13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	n_y	y	v	$n_y \cdot v$	$n_y v^2$	q	$q \cdot v$
72 - 76	2	1						3	74	-3	-9	27	-8	24
76 - 80	1	1		2				4	78	-2	-8	16	-5	10
80 - 84		3	2	4				9	82	-1	9	9	-8	8
84 - 88			3	8	5			16	86	0	0	0	2	0
88 - 92			2	6	4			12	90	1	12	12	2	2
92 - 96					2	1	3	6	94	2	12	24	13	26
96 - 100						2	1	3	98	3	9	27	7	21
n_x	3	5	7	20	11	3	4	53			7	115		**91**
x	6	8	10	12	14	16	18							
u	-3	-2	-1	0	1	2	3							
$n_x \cdot u$	-9	-10	-7	0	11	6	12	3						
$n_x u^2$	27	20	7	0	11	12	36	113						
t	-8	-8	0	-2	8	8	9							
$t \cdot u$	24	16	0	0	8	16	27	**91**						

Елементи рядку $\boldsymbol{n_x} \cdot u$ дорівнюють добуткам відповідних елементів рядків $\boldsymbol{n_x}$ і u; елементи стовпця $\boldsymbol{n_y} \cdot v$ дорівнюють добуткам відповідних елементів стовпців $\boldsymbol{n_y}$ і v; аналогічно знаходяться усі елементи $n_x u^2$ и $n_y v^2$.

Кожний елемент стовпця q дорівнює сумі добутків частот $\boldsymbol{n_{uv}}$ (тобто $\boldsymbol{n_{xy}}$**)**, котрі знаходяться у відповідному рядку кореляційної таблиці на відповідні елементи рядка u. Наприклад, q= - 8 (перший рядок) знайдено в такий спосіб: 2·(-3)+1·(-2) = - 8; q = -5 (другий рядок) знайдено в такий спосіб: 1·(-3)+1·(-2)+ 2·(0) = -5; q = -8 (третій рядок) знайдено в такий спосіб: 3·(-2)+2·(-1)+ 4·(0) = -8 і т.д.

У рядку t кожен елемент дорівнює сумі добутків частот $\boldsymbol{n_{uv}}$ (тобто $\boldsymbol{n_{xy}}$**)**, які знаходяться у відповідному стовпці кореляційної таблиці, на відповідні елементи стовпця v. Наприклад, t= - 8 (перший стовпець) знайдено в такий спосіб: 2·(- 3)+1·(-2) = -8; t= -8 (другий стовпець) знайдено в такий спосіб: 1·(-3)+1·(-2)+3·(-1)= -8; t= 0 (третій стовпець) знайдено в такий спосіб: 2·(-1)+3·(0)+2·(1)=0 і т.д.

В останньому стовпці qv кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів стовбців q і v, а в останньому рядку tu кожний елемент дорівнює добутку відповідних елементів рядків t і u. Рівність сум $\sum qv = \sum tu = \sum n_{uv}uv = 91$ використовують для контролю правильності обчислень.

Далі послідовно знаходимо:

$$\bar{u} = \frac{\sum n_x u}{n} = \frac{3}{53} = 0,057 \qquad \bar{v} = \frac{\sum n_y v}{n} = \frac{7}{53} = 0,13,$$

де $\bar{u}$, $\bar{v}$ – середні умовних варіант.

Середні квадратичні відхилення умовних варіант:

$$s_u = \sqrt{\frac{\sum n_x u^2}{\sum n_x} - (\bar{u})^2} = \sqrt{\frac{113}{53} - (0,057)^2} = 1,46;$$

$$s_v = \sqrt{\frac{\sum n_y v^2}{\sum n_y} - (\bar{v})^2} = \sqrt{\frac{115}{53} - (0,13)^2} = 1,47.$$

З урахуванням того, що $\sum qv = \sum tu = \sum n_{uv}uv = 91$, знаходимо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_в = \frac{\sum n_{uv}uv - n\bar{u}\bar{v}}{ns_u s_v} = \frac{91 - 53 \cdot 0,057 \cdot 0,13}{53 \cdot 1,46 \cdot 1,47} = 0,797.$$

Значення вибіркового коефіцієнту $r_B = 0,797$ вказує на досить сильний зв'язок між випадковими величинами.

Тепер знаходимо наступні величини:

- середні значення:

$$\bar{x} = \bar{u}h_1 + C_1 = 0,057 \cdot 2 + 12 = 12,11; \qquad \bar{y} = \bar{v}h_2 + C_2 = 0,13 \cdot 4 + 86 = 86,52;$$

- середні квадратичні відхилення:

$$s_x = s_u h_1 = 1,46 \cdot 2 = 2,92; \qquad s_y = s_v h_2 = 1,47 \cdot 4 = 5,88.$$

Підставивши знайдені величини в рівняння (5.9)

$$\bar{y}_x - 86,52 = 0,797 \frac{5,88}{2,92}(x - 12,11) \qquad (5.12)$$

знайдемо рівняння лінії регресії Y на X: $\bar{y}_x = 1,6 \cdot x + 67,1$.

Аналогічно можна знайти рівняння лінії регресії X на Y, якщо скористатись рівнянням (5.10).

Порівняємо умовні середні розраховані за рівнянням регресії (5.12) з даними кореляційної таблиці (див. табл. 5.6).

Аналізуючи дані, що наведені в табл. 5.6, можна побачити, що умовні середні відрізняються незначно. Різниця розрахункових і табличних даних вказує на достатню точність розрахунків за знайденим рівнянням регресії Y на X.

Таблиця 5.6 Порівняння даних

Значення x_i	Розрахунок за рівнянням $\bar{y}_x = 1,6 \cdot x + 67,1$	Значення з кореляційної таблиці	Різниця розрахункових і табличних даних
6	76,7	$\bar{y}_6 = \frac{2 \cdot 74 + 1 \cdot 78}{2+1} = 75,3$	1,4
8	79,9	$\bar{y}_8 = \frac{1 \cdot 74 + 1 \cdot 78 + 3 \cdot 82}{1+1+3} = 79,6$	0,3
10	83,1	$\bar{y}_{10} = \frac{2 \cdot 82 + 3 \cdot 86 + 2 \cdot 90}{2+3+2} = 86$	-2,9
12	86,3	$\bar{y}_{12} = \frac{2 \cdot 78 + 4 \cdot 82 + 8 \cdot 86 + 6 \cdot 90}{2+4+8+6} = 85,6$	0,7
14	89,5	$\bar{y}_{14} = \frac{5 \cdot 86 + 4 \cdot 90 + 2 \cdot 94}{5+4+2} = 88,9$	0,6
16	92,7	$\bar{y}_{16} = \frac{1 \cdot 94 + 2 \cdot 98}{1+2} = 96,7$	-4,0
18	95,9	$\bar{y}_{18} = \frac{3 \cdot 94 + 1 \cdot 98}{3+1} = 95$	0,9

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної теми рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Питання та завдання для самоперевірки

1. У чому полягає завдання апроксимації функції?
2. Якими критеріями керуються при виборі загального вигляду емпіричної функції?
3. Що таке точкова квадратична апроксимація і апроксимуючий багаточлен?
4. Чому метод найменших квадратів отримав таку назву? Як визначити похибку методу?
5. Запишіть нормальну систему рівнянь для випадку лінійної апроксимації.
6. Запишіть нормальну систему рівнянь для випадку квадратичної апроксимації.
7. Поліном якого порядку (першого чи другого) точніше опише експериментальну криву і чому?
8. Поняття кореляційної залежності.
9. Поняття ллінії регресії.
10. Що характеризує коефіцієнт вибіркової кореляції і які значення може приймати?
11. Кореляційна таблиця. Як вона створюється і як використовувати записані там дані?
12. Від’ємна і додатна лінійна кореляція.
13. Граничні значення коефіцієнта кореляції та їх сенс для оцінювання сили зв’язку між величинами.
14. Поняття умовних середніх.

Список літератури

Основна література

1. Брановицька С.В. Обчислювальна математика та програмування. Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник [Текст]/ С.В. Брановицька, Р.Б. Медведєв, Ю.Я. Фіалков. – К.: ІВЦ «Видавництво "Політехніка"», 2004. – 220 с.
2. Математична обробка експериментальних даних. Посібник для студентів хіміко-технологічного факультету до виконання курсової роботи з дисципліни: «Обчислювальна математика та програмування» [Текст]/ С.В. Брановицька, С.Г. Бондаренко, О.О. Квітка, Р.Б. Медведєв, А.І. Ткачук. – Київ: НТУУ «КПІ», 1997. – 76 с. – Рос. мовою.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов [Текст]/ В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 478 с.
4. Брановицька С.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси: метод. вказівки до викон. розрахункової роботи для студ. напряму підготов. 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані процеси». Ч 2: Математична статистика [Текст]/ С.В. Брановицька, Т.В. Бойко, О.В.Сангінова. - К.: НТУУ «КПІ», ВПІ ВПК «Політехніка», 2008. – 48 с.
5. Брановицкая С.В. Вычислительная математика в химии и химической технологии. Учебник [Текст]/ С.В. Брановицкая, Р.Б. Медведев, Ю.Я. Фиалков – К.: Вища школа, 1986. – 216 с.

Додаткова

6. Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст]/ Н. В. Копченова, И. А. Марон – М.: Мир., 2008. – 184 с.
7. Гутер Р.С. Основы теории вероятностей: Учеб. Пособие [Текст]/ Р.С.Гутер, Б. В. Овчинский.– Ташкент: Укитувчи, 1978. – 166 с.
8. Батунер Л.М. Математические методы в химической технике [Текст]/ Л.М. Батунер, М.Е. Позин. – Л.: «Химия», 1971.
9. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики [Текст]/ Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
10. Долженков В. MS Excel 2000 [Текст]/ В. Долженков, Ю. Колесников – СПб.: BHV, 1999. – 1088 с.

Додатки

Додаток А Завдання до Частини 1 РГР

(експериментальні функції)

Завдання для студентів групи 1

Таблиця А.1

Вар. №	Експериментальні результати									
1	***X***	1,1	1,25	1,4	1,55	1,7	1,85	2	2,15	2,3
	У	5,632	6,77	8,054	9,48	11,043	12,75	14,6	16,59	18,72
2	***X***	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	У	80,46	91,1	101	109,9	118,2	126	132,8	139,1	144,9
3	***X***	0,2	0,7 ,	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2
	У	0,29	0,248	0,215	0,19	0,172	0,15	0,143	0,13	0,12
4	***X***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	3,46	3,61	3,8	4	4,25	4,49	4,71	5	5,27
5	***X***	0,2	1,1	2	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4
	У	0,75	6,2	17,9	36,01	60,1	90,8	128	171	220,3
6	***X***	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3
	У	4,33	7,4	12,2	18,2	25,8	35	45	57,7	71,5
7	***X***	0,9	1,45	2	2,55	3,1	3,65	4,2	4,75	5,3
	У	15,01	20,91	24,61	27,6	30	31,9	33,7	35,1	36,5
8	***X***	0,65	1,05	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	3,45	3,85
	У	0,6	2	4,3	7,9	12,6	18,9	26,5	36	47
9	***X***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	5,38	4,35	3,8	3,45	3,2	3,05	2,9	2,81	2,72
10	***X***	0,65	0,9	1,15	1,4	1,65	1,9	2,15	2,4	2,65
	У	1,57	1,87	2,21	2,58	3,01	3,46	3,96	4,5	5,1
11	***X***	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1	3,5	3,9	4,3
	У	4,8	7,5	10,8	14,6	19,3	24,4	30,4	36,7	44
12	***X***	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
	У	14,8	14	13,2	12,7	12	11,3	10,8	10,2	9,6
13	***X***	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75
	У	8,3	11,8	16,4	23,3	32,7	46,3	65,1	92	129,4
14	***X***	0,45	0,9	1,35	1,8	2,25	2,7	3,15	3,6	4,05
	У	68,3	93,2	127,5	174,2	237,8	325	443,8	606,2	828,3
15	***X***	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4
	У	3,65	4,61	5,7	6,85	8,15	9,44	10,9	12,4	14,04

Завдання для студентів групи 2

Таблиця А.2

Вар. №	Експериментальні результати									
1	***X***	400	450	500	550	600	650	700	750	800
	У	112,6	122,8	132,4	141,3	149,6	157,3	164,5	171,2	177,3
2	***X***	1,1	1,25	1,4	1,55	1,7	1,85	2	2,15	2,3
	У	0,3001	0,3021	0,304	0,305	0,3061	0,307	0,308	0,3083	0,3089
3	***X***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	0,303	0,239	0,195	0,167	0,144	0,129	0,115	0,103	0,096
4	***X***	0,2	1,1	2	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,4
	У	0,92	4,25	7,28	10,15	13,01	15,6	18,5	21,01	23,7
5	***X***	0,65	1,05	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	3,45	3,85
	У	1,68	2,52	3,1	3,51	3,9	4,14	4,4	4,6	4,8
6	***X***	2,5	5	7,5	10	12,5	15	17,5	20	22,5
	У	3,81	5,51	6,54	7,28	7,8	8,27	8,64	9	9,25
7	***X***	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75
	У	4,2	6	8,2	10,7	13,7	17	20,7	24,7	29,2
8	***X***	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	У	0,1	3,01	4,71	5,92	6,86	7,63	8,27	8,83	9,33
9	***X***	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	У	4,83	5,21	5,57	5,91	6,29	6,63	7,03	7,37	7,71
10	***X***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	0,8	1,9	3,7	6	9,1	13	17,5	23,1	29,4
11	***X***	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1	3,5	3,9	4,3
	У	2,3	3,5	4,9	6,5	8	9,8	11,5	13,5	15,4
12	***X***	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	У	0,18	0,16	0,146	0,132	0,122	0,112	0,1	0,098	0,092
13	***X***	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,517,	6	6,5
	У	11,02	12,45	13,75	14,8	15,71	16,55	35	18,05	18,69
14	***X***	0,95	1,45	1,95	2,45	2,95	3,45	3,95	4,45	4,95
	У	1,33	1,67	2,13	2,69	3,41	4,3	5,44	6,9	8,7
15	***X***	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	У	28,5	37,1	50,4	69,1	92,5	120,9	154,6	193,1	236,5
16	***X***	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3
	У	0,175	0,27	0,31	0,347	0,367	0,383	0,394	0,403	0,409
17	***X***	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	У	35,1	20,9	16,4	14	12,5	11,6	11	10,5	10,1
18	***X***	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	У	24,1	55,9	104	168,1	247,8	344,1	455,9	584,1	728
19	***X***	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	У	6,3	8,37	9,6	10,44	11,12	11,68	12,14	12,53	12,9

продовження таблиці А.2

20	***Х***	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4
	У	1,662	1,315	1,117	0,972	0,875	0,801	0,742	0,699	0,658
21	***Х***	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3
	У	2,06	4,63	6,64	8,3	9,69	10,85	11,95	12,9	13,75
22	***Х***	350	400	450	500	550	600	650	700	750
	У	112,7	125,3	137,2	148,4	158,9	168,7	178	186,4	194,5
23	***Х***	2,5	3,3	4,1	4,9	5,7	6,5	7,3	8,1	8,9
	У	78,4	124,5	180,5	247	323,4	410,9	507,4	615	732,3
24	***Х***	4	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6
	У	53,2	65,4	80,7	99,2	122,4	150,5	185,4	228,5	281,1
25	***Х***	0,95	2,5	4,05	5,6	7,15	8,7	10,25	11,8	13,35
	У	4,99	10,33	13,86	16,27	18,1	19,51	20,6	21,53	22,28

Завдання для студентів групи 3

Таблиця А.3

Вар.	Експериментальні результати									
1	***Х***	1,5	2,1	2,7	3,3	3,9	4,5	5,1	5,7	6,3
	У	2,92	3,56	4,09	4,6	5,06	5,51	5,91	6,32	6,68
2	***Х***	0,6	1,8	3	4,2	5,4	6,6	7,8	9	10,2
	У	3,36	8,26	11,6	14,12	16,02	17,52	18,71	19,76	20,57
3	***Х***	0,74	3,26	5,78	8,3	10,82	13,34	15,86	18,38	20,9
	У	4,03	12,24	16,51	19,19	20,97	22,25	23,24	24,03	24,62
4	***Х***	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	У	1,55	2,701	3,998	5,43	7,01	8,73	10,61	12,63	14,78
5	***Х***	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	У	0,036	0,081	0,118	0,146	0,17	0,192	0,211	0,226	0,24
6	***Х***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	1,93	3,1	4,1	5,31	6,5	7,7	9	10,4	11,7
7	***Х***	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6
	У	23,81	15,32	12,5	11,01	10,22	9,62	9,22	8,91	8,7
8	***Х***	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3
	У	5,7	7,9	10,5	13,3	16,7	20,3	24,5	29	34
9	***Х***	1	3	5	7	9	11	13	15	17
	У	16	67	147	263	407	587	795	1039	1311
10	***Х***	0,65	1,05	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	3,45	3,85
	У	3,1	4,5	6,4	9,1	13	18,6	26,5	38	54,1
11	***Х***	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75
	У	5,66	5	4,61	4,32	4,14	4	3,89	3,8	3,73
12	***Х***	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	У	0,232	0,118	0,079	0,059	0,047	0,039	0,034	0,03	0,026
13	***Х***	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3
	У	5,7	3,7	3,17	2,8	2,72	2,61	2,53	2,48	2,44
14	***Х***	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	У	1,5	5	12,1	23,4	40,6	64,2	96,1	136,9	187,6
15	***Х***	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	У	2,13	3,05	3,66	4,11	4,47	4,77	5,03	5,25	5,46
16	***Х***	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1	3,5	3,9	4,3
	У	1,6	2,2	2,68	3,05	3,4	3,66	3,9	4,13	4,31
17	***Х***	8	8,9	9,8	10,7	11,6	12,5	13,4	14,3	15,2
	У	93,3	98,5	103,2	108	112,3	116,8	120,7	124,7	128,6
18	***Х***	1,5	1,9	2,3	2,7	3,116	3,5	3,9	4,3	4,7
	У	51,3	73,6	100,8	132,9	9,4	211,5	257,5	309	364,8
19	***Х***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	1,71	2,41	2,9	3,31	3,66	3,93	4,18	4,41	4,6
20	***Х***	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4
	У	0,386	0,618	0,896	1,205	1,56	1,941	2,36	2,809	3,284

продовження таблиці А.3

21	***X***	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	У	3,01	4,74	7,02	9,76	13	16,77	20,98	25,73	31,03
22	***X***	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3
	У	24,2	33,7	46,7	65,1	90,3	125,6	174,9	243,3	337,1
23	***X***	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	У	0,115	0,095	0,082	0,071	0,063	0,057	0,052	0,048	0,044
24	***X***	2,5	3,3	4,1	4,9	5,7	6,5	7,3	8,1	8,9
	У	18,32	20,56	22,28	23,7	24,95	26	26,9	27,72	28,5
25	***X***	5,14	6,86	8,58	10,3	12,02	13,74	15,46	17,18	18,9
	У	15,64	17,81	19,4	20,67	21,63	22,42	23,1	23,68	24,16

Завдання для студентів групи 4

Таблиця А.4

Вар. №	Експериментальні результати									
1	***Х***	4,86	5,92	6,98	8,04	9,1	10,16	11,22	12,28	13,34
	У	2243	3235	4385	5700	7172	8793	10570	12497	14565
2	***Х***	5,76	6,48	7,2	7,92	8,64	9,36	10,08	10,8	11,52
	У	3073	3824	4645	5543	6514	7558	8665	9848	11100
3	***Х***	0,08	0,17	0,26	0,35	0,44	0,53	0,62	0,71	0,8
	У	0,509	0,711	0,807	0,866	0,903	0,933	0,952	0,968	0,979
4	***Х***	1,9	2,74	3,58	4,42	5,26	6,1	6,94	7,78	8,62
	У	3,35	4,15	4,82	5,45	6,03	6,55	7,07	7,54	8
5	***Х***	2,67	4,42	6,17	7,92	9,67	11,42	13,17	14,92	16,67
	У	10,8	14,52	17	18,85	20,23	21,3	22,19	22,92	23,5
6	***Х***	1,72	2,56	3,4	4;24	5,08	5,92	6,76	7,6	8,44
	У	3,16	3,99	4,67	5,32	5,89	6,46	6,95	7,45	7,91
7	***Х***	0,5	1	1.5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	У	4,5	9,41	12,21	14,3	15,9	17,25	18,32	19,22	20,1
8	***Х***	4,22	6,45	8,68	10,91	13,14	15,37	17,6	19,83	22,06
	У	14,15	17,37	19,46	21,04	22,18	23,07	23,77	24,39	24,87
9	***Х***	7,2	7,92	8,64	9,36	10,08	10,8	11,52	12,24	12,96
	У	4646	5542	6516	7553	8667	9850	11100	12418	13808
10	***Х***	2,4	4,28	6,16	8,04	9,92	11,8	13,68	15,56	17,44
	У	10,8	14,24	17,02	18,94	20,4	21,51	22,43	23,13	23,74
11	***Х***	0,12	0,2	0,28	0,36	0,44	0,52	0,6	0,68	0,76
	У	0,62	0,748	0,824	0,872	0,904	0,928	0,949	0,963	0,974
12	***Х***	4,36	5,27	6,18	7,09	8	8,91	9,82	10,73	11,64
	У	5,41	6,02	6,62	7,14	7,68	8,16	8,64	9,07	9,52
13	***Х***	0,09	0,17	0,25	0,33	0,41	0,49	0,57	0,65	0,73
	У	0,542	0,709	0,801	0,855	0,892	0,921	0,942	0,958	0,97
14	***Х***	5,55	6,23	6,91	7,59	8,27	8,95	9,63	10,31	10,99
	У	2868	3555	4303	5125	6007	6950	7964	9039	10172
15	***Х***	1,66	2,98	4,3	5,62	6,94	8,26	9,58	10,9	12,22
	У	3,1	4,32	5,37	6,26	7,05	7,8	8,53	9,15	9,78
16	***Х***	4,5	5,46	6,42	7,38	8,34	9,3	10,26	11,22	12,18
	У	1945	2780	3760	4862	6101	7467	8953	10570	12310
17	***Х***	0,1	0,19	0,28	0,37	0,46	0,55	0,64	0,73	0,82
	У	0,57	0,744	0,831	0,882	0,918	0,941	0,962	0,975	0,987
18	***Х***	3,48	4,54	5,6	6,66	7,72	8,78	9,84	10,9	11,96
	У	4,75	5,52	6,25	6,9	7,52	8,08	8,64	9,17	9,66
19	***Х***	8,15	8,73	9,31	9,89	10,47	11,05	11,63	12,21	12,79
	У	7,75	8а05	8,38	8,66	8,94	9,24	9,5	9,79	10,05

продовження таблиці А.4

20	**X** **У**	2,6 4,01	3,2 4,53	3,8 4,98	4,4 5,43	5 5,84	5,6 6,25	6,2 6,61	6,8 6,99	7,4 7,33
21	***X*** ***У***	420 161,3	470 176	520 189,8	570 202,7	620 214,5	670 225,6	720 235,8	770 245,3	820 254
22	***X*** ***У***	3 63,1	3,7 82,1	4,4 102	5,1 122,6	5,8 144,1	6,5 166	7,2 188,7	7,9 212	8,6 235,4
23	***X*** ***У***	1,75 12,02	2 13,71	2,25 15,45	2,5 17,4	2,75 19,3	3 21,43	3,25 23,6	3,5 25,8	3,75 28,21
24	***X*** ***У***	0,01 215,2	0,02 115,5	0,03 81,6	0,04 65,1	0,05 55,2	0,06 48,3	0,07 43,58	0,08 40,1	0,09 37,2
25	***X*** ***У***	9 52,1	11 75,6	13 104	15 136,5	17 174	19 215,7	21 262,9	23 313	25 370

Завдання для студентів групи 5

Таблиця А.5

Вар	Експериментальні результати									
1	***X***	480	520	560	600	640	680	720	760	800
	У	281	296,9	312,3	326,9	340,6	358,7	366	377,5	388,4
2	***X***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	3,6	4,7	6,1	7,9	10,2	13,3	17,4	22,6	29,5
3	***X***	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
	У	10,56	11,65	12,65	13,74	14,77	15,85	16,87	17,94	18,96
4	***X***	400	440	480	520	560	600	640	680	720
	У	111,3	119,3	127	134,2	141	147,5	153,7	159,6	165
5	***X***	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	У	2,79	3,73	5	6,69	8,96	12	16,05	21,5	28,77
6	***X***	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	У	27,6	12,5	8,57	6,84	5,84	5,21	4,74	4,42	4,16
7	***X***	420	470	520	570	620	670	720	770	820
	У	179,1	195,8	211,2	225,7	239	251,2	262,6	273	282,7
8	***X***	0,7	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8	3,1
	У	4,7	4,2	3,9	3,74	3,61	3,56	3,49	3,43	3,38
9	***X***	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	У	9,31	10,68	11,58	12,27	12,83	13,31	13,72	14,1	14,43
10	***X***	520	570	620	670	720	770	820	870	920
	У	208,6	223,4	237,1	249,7	261,3	272,1	282	290,9	299,2
11	***X***	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6
	У	0,57	5,3	8,01	10,02	11,5	12,8	13,81	14,72	15,51
12	***X***	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3
	У	0,3	1,5	4,4	10,3	20,5	36,9	61,2	95,9	143,1
13	***X***	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	У	4,5	7,8	13,5	23,3	40,4	70,2	121,4	210,5	364,4
14	***X***	570	620	670	720	770	820	870	920	970
	У	56,33	58	59,6	60,9	62,1	63,33	64,4	65,3	66,25
15	***X***	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
	У	0,207	0,192	0,18	0,169	0,159	0,151	0,143	0,136	0,13
16	***X***	10	12	14	16	18	20	22	24	26
	У	114,5	141,6	170,9	201,3	233,7	267,2	302,9	339,7	378,5
17	***X***	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75
	У	1,14	2	2,68	3,21	3,67	4,07	4,43	4,75	5,03
18	***X***	470	520	570	620	670	720	770	820	870
	У	191,2	207,1	222	235,6	248,3	260	271	280,7	290
19	***X***	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
	У	1,9	2,7	3,6	4,6	5,7	6,9	8,2	9,5	10,9
20	***X***	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	У	0,077	0,06	0,05	0,042	0,037	0,033	0,029	0,026	0,024

Завдання для студентів групи 6

Таблиця А.6

Вар. №	Експериментальні результати									
1	***X***	570	620	670	720	770	820	870	920	970
	У	165,3	174,1	182	189,1	195,4	201,2	206,3	211,2	216
2	***X***	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9
	У	53,4	64,32	76,5	89,61	103,88	119,11	135,46	152,8	171,23
3	***X***	0,12	0,6	1,08	1,56	2,04	2,52	3	3,48	3,96
	У	0,165	0,26	0,307	0,34	0,366	0,388	0,408	0,425	0,441
4	***X***	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7,2	8,2	9,2
	У	31,2	68,9	121	189	271,5	369,3	482	609	752
5	***X***	300	340	380	420	460	500	540	580	620
	У	69	76,82	84,26	91,32	98,03	104,4	110,4	116,2	121
6	***X***	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,63	0,72	0,81
	У	0,542	0,723	0,817	0,87	0,908	0,935	0,954	0,968	0,982
7	***X***	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3
	У	0,6	2,5	5,44	9,4	14,3	20,01	26,8	34	42,01
8	***X***	1,1	1,25	1,4	1,55	1,7	1,85	2	2,15	2,3
	У	3,21	3,294	3,37	3,438	3,5	3,564	3,61	3,67	3,721
9	***X***	0,4	1	1,6	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2
	У	16,2	8,15	6,22	5,3	4,81	4,47	4,22	4,06	3,92
10	***X***	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
	У	10,5	11,1	11,7	12,4	13,2	14	14,9	15,8	16,9
11	***X***	340	380	420	460	500	540	580	620	660
	У	102,7	113,1	122,9	132,1	140,8	149	156,7	169,9	170,7
12	***X***	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	У	1,6	3,5	5,5	7,61	9,75	11,98	14,2	16,54	18,8
13	***X***	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	У	9	12,4	16,6	21,4	27,1	33,3	40,5	48,4	57,1
14	***X***	0,1	0,25	0,4	0,55	0,7	0,85	1	1,15	1,3
	У	49,11	30,37	25,78	23,6	22,51	21,62	21,11	20,7	20,38
15	***X***	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75	7,5	8,25	9
	У	20,22	24,2	28	31,64	35,21	38,72	42,16	45,41	48,75
16	***X***	2,10,2	3	3,9	4,8	5,7	6,6	7,5	8,4	9,3
	У	58	0,217	0,185	0,164	0,145	0,13	0,119	0,109	0,1
17	***X***	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	У	0,91	1,22	1,61	2,02	2,53	3,09	3,7	4,41	5,19
18	***X***	2	3,25	4,5	5,75	7	8,25	9,5	10,75	12
	У	10,45	18,44	29,15	42,72	59	78	100,1	124,3	152,3
19	***X***	7	7,75	8,5	9,25	10	10,75	11,5	12,25	13
	У	143,1	174	208,3	245,4	286,2	329	376,1	425,2	478,6
20	***X***	1	1,6	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2	5,8
	У	12,7	23,4	36,5	52,6	71	92,4	116	142,9	172,1

Завдання для студентів групи 7

Таблиця А.7

Вар. №	Експериментальні результати									
1	***X***	10	12	14	16	18	20	22	24	26
	У	1,135	0,972	0,865	0,779	0,718	0,663	0,623	0,586	0,555
2	***X***	0,12	0,6	1,08	1,56	2,04	2,52	3	3,48	3,96
	У	2,633	0,766	0,56	0,48	0,436	0,411	0,394	0,38	0,371
3	***X***	1,2	2,2	3,2	4,2	5,2	6,2	7,2	8,2	9,2
	У	17,6	13	11,3	10,4	9,81	9,47	9,17	8,98	8,81
4	***X***	0,4	1	1,6	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2
	У	2,6	5,35	6,6	7,6	8,32	8,82	9,33	9,71	10,1
5	***X***	0.12	0,25	0,4	0,55	0,7	0,85	1	1.15	1,3
	У	0,2	23,85	28,31	33,5	39,9	47,1	55,78	66,1	78,39
6	***X***	1.1	1,25	1,4	1,55	1,7	1,85	2	2,15	2,3
	У	0,5	0,903	1,25	1,581	1,871	2,14	2,37	2,611	2,825
7	***X***	0,65	0,9	1,15	1,4	1,65	1,9	2,15	2,4	2,65
	У	0,528	0,635	0,716	0,781	0,835	0,881	0,922	0,958	0,991
8	***X***	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75	7,5	8,25	9
	У	10,02	11,91	13,42	14,72	15,86	16,82	17,73	18,51	19,26
9	***X***	2.1	3	3,9	4,8	5,7	6,6	7,5	8,4	9,3
	У	3,98	8,43	14,65	22,62	32,51	44,17	57,81	73,3	90,85
10	***X***	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3 1
	У	17	23,5	31,8	41,5	53	66,1	80,6	97	15
11	***X***	0,8	0,9	1	1.1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
	У	3,32	3,65	4,01	4,38	4,81	5,26	5,77	6,33	6,94
12	***X***	0,95	1,3	1,65	2	2,35	2,7	3,05	3,4	3,75
	У	0,843	1,262	1,718	2,2	2,711	3,24	3,8	4,361	4,95
13	***X***	2	3,25	4,5	5,75	7	8,25	9,5	10,75	12
	У	2,9	6,61	11,46	17,42	24,31	32,18	40,9	50,41	60,83
14	***X***	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75	7,5	8,25	9
	У	10,22	14	18,32	23,31	28,81	35	41,7	49,08	57,01
15	***X***	7	7,75	8,5	9,25	10	10,75	11,5	12,25	13
	У	15,84	17,35	18,88	20,37	21,85	23,3	24,78	26,2	27,69
16	***X***	1	1,6	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2	5,8
	У	11,71	8,69	7,34	6,55	6,05	5,71	5,43	5,23	5,07
17	***X***	5	8	11	14	17	20	23	26	29
	У	20,1	44,5	76,5	115,5	160,4	211,9	268,2	330,9	398
18	***X***	7,7	8	8,3	8,6	8,9	9,2	9,5	9,8	10.1
	У	534,1	573,2	613,3	655	698	742,8	788,1	835,9	884,1
19	***X***	0,5	1.1	1,7	2,3	2,9	3,5	4,1	4,7	5,3
	У	0,34	2	2,9	3,54	4,03	4,44	4,75	5,05	5,3
20	***X***	3	4,2	5,4	6,6	7,8	9	10,2	11,4	12,6
	У	5,7	6,56	7,201	7,711	8,139	8,501	8,823	9,105	9,36

Завдання для студентів групи 8

Таблиця А.8

Вар. №	Експериментальні результати									
1	***x***	0,95	1,45	1,95	2,45	2,95	3,45	3,95	4,45	4,95
	y	0,78	1,53	2,47	3,57	4,81	6,15	7,64	9,27	10,99
2	***x***	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	y	0,036	0,081	0,118	0,146	0,17	0,192	0,211	0,226	0,24
3	***x***	3	3,7	4,4	5,1	5,8	6,5	7,2	7,9	8,6
	y	18,9	22,1	25	27,3	29,3	31,2	32,8	34,3	35,6
4	***x***	0,65	1,05	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	3,45	3,85
	y	0,6	2	4,3	7,9	12,6	18,9	26,5	36	47
5	***x***	0,07	0,18	0,29	0,4	0,51	0,62	0,73	0,84	0,95
	y	0,473	0,725	0,829	0,89	0,925	0,952	0,97	0,986	0,997
6	***x***	2,8	4,24	5,68	7,12	8,56	10	11,44	12,88	14,32
	y	11,14	14,16	16,42	18,05	19,39	20,45	21,3	22,07	22,65
7	***x***	350	400	450	500	550	600	650	700	750
	y	72,42	80,28	87,69	97,67	101,2	107,4	113,1	118,6	123,6
8	***x***	300	350	400	450	500	550	600	650	700
	y	104,6	122,5	139,2	154,7	169	182,2	194,3	205,4	215,6
9	***x***	1,1	1,25	1,4	1,55	1,7	1,85	2	2,15	2,3
	y	3,332	3,31	3,29	3,28	3,26	3,255	3,25	3,24	3,23
10	***x***	0,8	1,4	2	2,6	3,2	3,8	4,4	5	5,6
	y	3,153	1,68	0,893	0,477	0,253	0,135	0,072	0,038	0,02
11	***x***	0,95	1,45	1,95	2,45	2,95	3,45	3,95	4,45	4,95
	y	0,415	0,354	0,306	0,272	0,244	0,22	0,202	0,185	0,172
12	***x***	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
	y	9,18	12,3	16,16	21,02	26,63	33,29	40,65	49,06	58,16
13	***x***	0,2	0,7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2	3,7	4,2
	y	1,268	2,772	3,419	3,835	4,146	4,392	4,595	4,77	4,92
14	***x***	0,6	1,8	3	4,2	5,4	6,6	7,8	9	10,2
	y	0,118	0,067	0,047	0,036	0,029	0,025	0,021	0,019	0,017
15	***x***	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
	y	64,2	88,1	116	147,7	183,8	223,3	267,5	315	367
16	***x***	7	7,7	8,4	9,1	9,8	10,5	11,2	11,9	12,6
	y	25,25	29,2	33,45	38,04	43	48,15	53,81	59,62	65,77
17	***x***	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	y	40	129	274	470	724	1029	1390	1804	2270
18	***x***	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2	2,3	2,6
	y	3,05	5	8,1	13,1	21,6	35,1	57	93,5	152
19	***x***	3	3,75	4,5	5,25	6	6,75	7,5	8,25	9
	y	1,57	2,08	2,72	3,58	4,71	6,21	8,16	10,72	14,07
20	***x***	5	6,5	8	9,5	11	12,5	14	15,5	17
	y	114	203	320	467	645	854	1096	1371	1680

Додаток Б. Завдання до другої частини РГР (кореляційні таблиці)

№ 1

Y / X	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12	12 - 14	14 - 16
8 - 12	2	5				
12 - 16		6	3			
16 - 20			2	10	4	
20 - 24			1	5	3	
24 - 28				2	6	4

№ 2

Y / X	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21
18 - 22	1	3				
22 - 26		5	4			
26 - 30			6	20	3	
30 - 34			2	10	4	
34 - 38				5	7	2

№ 3

Y / X	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29
22 - 28	1	5				
28 - 34		6	2			
34 - 40			7	15	3	
40 - 46			3	8	6	
46 - 52				4	5	2

№ 4

Y \ X	10 - 12	12 - 14	14 - 16	16 - 18	18 - 20	20 - 22
64 – 70	3	2				
70 - 76	1	2		3		
76 - 82		4	12	5		
82 - 88			7	4	6	
88 - 94			2		4	1

№ 5

Y \ X	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39
20 - 30	3	4				
30 - 40		5	6			
40 - 50			7	30	2	
50 - 60			5	10	4	
60 - 70				3	8	2

№ 6

Y \ X	7 - 13	13 - 19	19 - 25	25 - 31	31- 37	37 - 43
12 - 20	4	2				
20 - 28		5	3			
28 - 36			6	20	6	
36 - 44			2	7	5	
44 - 52				3	7	4

№ 7

Y \ X	23 - 27	27 - 31	31 - 35	35 - 39	39 - 43	43 - 47
33 - 43	2	3				
43 - 53		4	5			
53 - 63			8	40	6	
63 - 73			2	6	4	
73 - 83				3	7	2

№ 8

Y \ X	18 - 22	22 - 26	26 - 30	30 - 34	34 - 38	38 - 42
20 - 30	1	4				
30 - 40		6	3			
40 - 50			6	45	5	
50 - 60			2	10	6	
60- 70				4	7	3

№ 9

Y \ X	8 - 12	12 - 16	16 - 20	20 - 24	24 - 28	28 - 32
10 - 20	5	7				
20 - 30		10	13			
30 - 40			20	30	6	
40 - 50			8	12	10	2
50 - 60				8	4	3

№ 10

Y / X	2 - 8	8 - 14	14 - 20	20 - 26	26 - 32	32 - 38
5 – 15	2	3				
15 - 25		4	1			
25 - 35			6	30	7	
35 - 45			5	12	3	
45 - 55				6	9	2

№ 11

Y / X	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10- 12	12- 14
12 - 18	4	1				
18 - 24		2	1			
24 - 30		6	20	5		
30 - 36			3	7	2	
36 - 42					1	2

№ 12

Y / X	25 - 35	35 - 45	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85
30 - 40	3	1				
40 - 50		2	3			
50 - 60			5	20	7	
60 - 70			6	8	4	
70 - 80				2	5	3

№ 13

Y / X	3 - 9	9 - 15	15 - 21	21 - 27	27 - 33	33 - 39
11 - 21	3	6				
21 - 31		9	11			
31 - 41			4	25	6	
41 - 51			4	10	5	
51 - 61				1	3	2

14

Y / X	7 - 11	11 - 15	15 - 19	19 - 23	23 - 27	27 - 31
21 - 29	1	4				
29 - 37	1	2	3			
37 - 45			7	30	3	
45 - 53			4	10	6	
53 - 61				5	4	2

№ 15

Y / X	6 - 10	10 - 14	14 - 18	18 - 22	22 - 26	26 - 30
16- 24	3	3				
24 - 32		6	5			
32 - 40			8	35	4	
40 - 48				10	6	1
48 - 56					7	4

№ 16

Y \ X	4 - 14	14 - 24	24 - 34	34 - 44	44 - 54	54 - 64
16 – 26	5	4				
26 - 36	1	3	6			
36 - 46			5	45	5	
46 - 56			2	8	7	
56 - 66				4	8	2

№ 17

Y \ X	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
25 - 35	2	1				
35 - 45	1	2	3			
45 - 55			4	20	5	
55 - 65			2	10	8	
65 - 75				3	7	1

№ 18

Y \ X	22 - 28	28 - 34	34 - 40	40 - 46	46 - 52	52 - 58
31 - 39	4	2				
39 - 47		2	3	1		
47 - 55			5	50	6	
55 - 63				10	8	1
63 - 71					2	3

№ 19

Y \ X	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25	25 - 29	29 - 33
18 – 28	2	3	1			
28 - 38		2	4			
38 - 48			6	35	8	
48 - 58			2	9	5	
58 - 68					6	4

№ 20

Y \ X	19 - 25	25 - 31	31 - 37	37 - 43	43 - 49	49 - 55
24 - 34	2	2				
34 - 44		4	5			
44 - 54			10	45	7	
54 - 64			3	10	6	
64 - 74					2	5

№ 21

Y \ X	4 - 10	10 – 16	16 - 22	22 - 28	28 - 34	34 - 40
17 - 27	2	4				
27 - 37		6	2	1		
37 - 47			3	35	2	
47 - 57			1	10	6	
57 - 67				4	2	4

№ 22

Y \ X	1 - 9	9 - 17	17 - 25	25 - 33	33 - 41	41 - 49
13 – 23	5	7				
23 - 33		6	8			
33 - 43			4	40	5	
43 - 53			6	12	2	
53 - 63				1	3	2

№ 23

Y \ X	3 - 5	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13	13 - 15
10 - 18	3	6				
18 - 26		1	4			
26 - 34			5	25	8	
34 - 42			2	10	3	
42 - 50				5	2	7

№ 24

y \ x	11 – 17	17 – 23	23 – 29	29 – 35	35 – 41	41 – 47
19 – 29	2	5				
29 – 39		5	15			
39 – 49			6	30	4	
49 - 59			4	12	6	
59 - 69				1	4	3

№25

y \ x	35 – 39	39 – 43	43 – 47	47 – 51	51 – 55	55 – 59
42– 52	4	2				
52– 62		6	4			
62 - 72			6	45	5	
72 - 82			5	15	8	
82 - 92					2	4

№26

y \ x	14 – 20	20 – 26	26 – 32	32 – 38	38 – 44	44 – 50
22 – 32	4	4				
32 – 42		6	5			
42 – 52			8	40	2	
52 - 62			4	10	6	
62 - 72				3	7	2

№27

y \ x	2 – 6	6 – 10	10 – 14	14 – 18	18 – 22	22 – 26
11 – 19	2	5				
19 – 27		7	3			
27 – 35			4	40	2	
35 - 43			1	10	6	
43 - 51				5	7	3

№28

y \ x	25 – 29	29 – 33	33 – 37	37 – 41	41 – 45	45 – 49
35 – 45	4	2				
45 – 55		5	2			
55 – 65			6	43	5	
65 - 75			1	7	3	
75 - 85				2	2	4

№29

y \ x	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25 – 27	27 – 29	29 – 31
20 – 28	3	5				
28 – 36		6	2			
36 – 44			3	30	4	
44 - 50			5	8	6	
50 - 56				2	5	3

№30

y \ x	5 – 11	11 – 17	17 – 23	23 – 29	29 – 35	35 – 41
21 – 31	3	4				
31 – 41	1	6	2			
41 – 51			3	45	2	
51 - 61			1	8	6	
61 - 71				7	2	3

Додаток В. Зразок титульного листа

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний Університет України
«Київський політехнічній Інститут»

Кафедра кібернетики ХТП

Розрахунково-графічна робота

з дисципліни**: «ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ»**

на тему**: «Математична обробка експериментальних даних»**

Виконала:

Студентка II-го курсу
ХТФ
Групи гр. ХН-81
Ільїна І.С.

Перевірив:
доц. Бондаренко С.Г.

Київ 2014

Додаток Г. Вибір виду апроксимуючої функції (аналітичний метод вибору)

Слід зауважити, що при застосуванні графічного методу вибору виду апроксимуючої функції виникають деякі складнощі. Це пов'язане з тим, що на невеликому відрізку, де отримана функція, яку апроксимують, графіки багатьох функцій схожі між собою. Це ускладнює вибір.

Аналітичний метод, базується на використанні деяких аналітичних критеріїв для вибору загального виду емпіричної формули. Він дозволяє обрати для апроксимації одну з ряду функцій, з якими працює метод. Недоліком методу є те, що перелік функцій досить обмежений.

Розглянемо вибір виду апроксимуючої функції з двома параметрами.

Емпіричні формули з двома параметрами

При аналізі й описуванні закономірностей хімічних і фізико-хімічних процесів і явищ емпіричну формулу найчастіше обирають серед таких функцій:

I) $y = a \cdot x + b$ - лінійна;

II) $y = a \cdot b^x$ - показникова;

III) $y = \dfrac{1}{a \cdot x + b}$ - дробово-раціональна;

IV) $y = a \cdot ln(x) + b$ - логарифмічна;

V) $y = a \cdot x^b$ - степенева, причому при b>0 – залежність параболічна, а при b<0 - гіперболічна;

VI) $y = a + \dfrac{b}{x}$ - гіперболічна;

VII) $y = \dfrac{x}{a \cdot x + b}$ - дробово-раціональна.

З метою визначення функції, що найкраще описує дослідні дані, необхідно виконати наступні розрахунки.

1. За даними таблиці Г.1 знайти:

Таблиця Г.1

$\boldsymbol{x}$	x_1	x_2	…	x_n
$\boldsymbol{y}$	y_1	y_2	…	y_n

$x_{\text{ар}} = \frac{x_1+x_n}{2}$ (середнє арифметичне значень x_1та x_n); $y_{\text{ар}} = \frac{y_1+y_n}{2}$;

$x_{\text{геом}} = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$ (середнє геометричне); $y_{\text{геом}} = \sqrt{y_1 \cdot y_n}$;

$x_{\text{гарм}} = \frac{2x_1x_n}{x_1+x_n}$ (середнє гармонічне); $y_{\text{гарм}} = \frac{2y_1y_n}{y_1+y_n}$.

2. За даними табл. Г.1, користуючись, наприклад, інтерполяційними формулами (або за наближено побудованому графіку шуканої функції, навколо якого групуються дослідні точки (x_i, y_i)), знайти значення $y^*_{\text{ар}}$, $y^*_{\text{геом}}$, $y^*_{\text{гарм}}$, що відповідають знайденим у попередньому пункті значенням $x^*_{\text{ар}}$, $x^*_{\text{геом}}$, $x^*_{\text{гарм}}$. Причому, якщо, наприклад, $x^*_{\text{ар}}$ (або $x^*_{\text{геом}}$, $x^*_{\text{гарм}}$), співпадає з табличним значенням $x_i (i = 1,2,\dots,n)$, то відповідне значення $y^*_{\text{ар}}$ (або $y^*_{\text{геом}}$, $y^*_{\text{гарм}}$) буде теж дорівнювати табличному значенню y_i; в іншому випадку $y^*_{\text{ар}}$ можна визначити, користуючись формулою лінійної інтерполяції

$$y^*_{ap} = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x_{ap} - x_i), \qquad (\text{Г.1})$$

де x_i, x_{i+1}– значення з табл. Г.1, між якими знаходиться $x^*_{\text{ар}}(x_i < x_{ap} < x_{i+1})$; $y_i < y^*_{ap} < y_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1)$.

3. Знайти величини:

$\varepsilon_1 = | y^*_{\text{ар}} - y_{\text{ар}} |$ $\varepsilon_4 = | y^*_{\text{геом}} - y_{\text{ар}} |$

$\varepsilon_2 = | y^*_{\text{ар}} - y_{\text{геом}} |$ $\varepsilon_5 = | y^*_{\text{геом}} - y_{\text{геом}} |$

$\varepsilon_3 = | y^*_{\text{ар}} - y_{\text{гарм}} |$ $\varepsilon_6 = | y^*_{\text{гарм}} - y_{\text{ар}} |$ $\varepsilon_7 = | y^*_{\text{гарм}} - y_{\text{гарм}} |$

і серед них визначити мінімальне значення

$$\varepsilon = min\{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_7\}.$$

4. Обрати емпіричну формулу серед функцій I÷VII. Шукана емпірична формула матиме вигляд:

I) $y = a \cdot x + b$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_1$;

II) $y = a \cdot b^x$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_2$;

III) $y = \dfrac{1}{a \cdot x + b}$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_3$;

IV) $y = a \cdot ln(x) + b$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_4$;

V) $y = a \cdot x^b$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_5$;

VI) $y = a + \dfrac{b}{x}$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_6$;

VII) $y = \dfrac{x}{a \cdot x + b}$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_7$.

Слід враховувати, що I÷VII монотонні, і тому відповідні їм дослідні дані (x_i, y_i)при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ повинні мати постійний знак приросту $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. В іншому випадку залежності I÷VII не рекомендовані.

Такий спосіб вибору емпіричної формули є грубо орієнтовним, оскільки він не враховує поведінку всіх проміжних даних (x_i, y_i). Також може статися, що змінні x і y підпорядковуються іншій закономірності, і тоді вид емпіричної формули буде відрізнятися від функцій I÷VII.

Примітка. При використанні цього методу вважатимемо, що початкові дані x_i, y_i $(i = 1,2,\ldots,n;\ n \geq 3)$ додатні і $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Якщо ж всі $x_i < 0$ (або всі $y_i < 0$), то достатньо розглянути таблицю значень $(-x_i, y_i)$ (або відповідно $(x_i, -y_i)$. Аналогічно при $x_i < 0$ та $y_i < 0$ достатньо побудувати емпіричну формулу для таблиці $(-x_i, -y_i)$. У випадку, коли деякі із значень x_i, y_iдодатні, а деякі – від'ємні, завжди можливо виконати заміну змінних, підібравши такі числа $M > 0$ і $N > 0$, при яких $\xi_i = M + x_i > 0$, $\eta_i = N + y_i > 0$. Тоді задача зводиться до знаходження емпіричної формули для додатних значень ξ_i і $\eta_i (i = 1,2,\ldots,n)$.

Зведення нелінійних залежностей до задачі лінійної апроксимації (метод вирівнювання)

1. Нехай залежність між x та y досить добре описується показниковою функцією:

$$\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x}. \qquad (Г.2)$$

Необхідно за МНК визначити коефіцієнти цієї функції а та b.

Використовуємо метод вирівнювання, який після переходу до іншої системи координат дозволить працювати із заданою залежністю як з лінійною.

Прологарифмуємо залежність (Г.2) і отримаємо:

$$lg(\hat{y}) = lg(a) + b \cdot x \cdot lg(e). \qquad (Г.3)$$

Позначимо:

$$P = lg(\hat{y}); \quad C = lg(a); \; D = b \cdot lg(e)$$

і отримаємо рівняння:

$$P = C + D \cdot x. \qquad (Г.4)$$

Це рівняння є лінійним в новій системі координат P та x.

Для цього рівняння можна застосовувати метод найменших квадратів – ***лінійну апроксимацію*** і знайти коефіцієнти C і D.

Після того як знайшли C і D , знаходимо а та b з формул

$$C = lg(a); \quad D = b \cdot lg(e).$$

Ці коефіцієнти і підставимо в апроксимуючу залежність $\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x}$.

2. Для залежностей виду $\hat{y} = a \cdot b^{x}$:

$$lg(\hat{y}) = lg(a) + x \cdot lg(b)$$

$$P = C + D \cdot x$$

3. Для дробово-раціональних функцій виду $\hat{y} = \frac{1}{a \cdot x + b}$

знайдемо обернену залежність: $\frac{1}{\hat{y}} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{b}$.

Прийнявши $\mathrm{W} = \frac{1}{\hat{y}}$, отримаємо $\mathrm{W} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{b}$.

4. Для логарифмічної залежності виду $\hat{y} = a \cdot ln(x) + b$:

прийнявши $Q = ln(x)$, отримаємо $\hat{y} = a \cdot Q + b$.

5. Для степеневої залежності $\hat{y} = a \cdot x^b$, де $a, b > 0$:

Прологарифмувавши залежність, отримаємо: $lg(\hat{y}) = lg(a) + b \cdot lg(x)$.

Позначивши: $z = lg(y)$, $A = lg(a)$, $\varphi = lg(x)$,

отримаємо: $z = A + b \cdot \varphi$.

6. Для функції виду $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$:

позначивши $q = \frac{1}{x}$, отримаємо: $\hat{y} = a + b \cdot q$.

7. Для дробово-раціональних функцій виду $\hat{y} = \frac{x}{a \cdot x + b}$

знайдемо обернену залежність: $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$.

Уведемо позначення: $z = \frac{1}{\hat{y}}$, $q = \frac{1}{x}$.

Отримаємо: $z = a + b \cdot q$.

Приклад.

Користуючись аналітичним способом, знайти загальний вигляд емпіричної формули, який відповідає даним у таблиці Г.2; визначити параметри методом найменших квадратів; оцінити точність отриманої емпіричної формули.

Таблиця Г.2

x	3,304	1,457	0,903	0,382	0,245	0,167	0,119
y	0,5	1,2	2,0	5,0	8,0	12,0	17,0

Розв'язок. Обиратимемо емпіричну формулу будемо серед залежностей II-VII. За даними табл. Г.2 знайдемо:

$$x_{\text{ар}} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{3{,}304 + 0{,}119}{2} = 1{,}712;$$

$$x_{\text{геом}} = \sqrt{x_1 \cdot x_n} = \sqrt{3{,}304 \cdot 0{,}119} = 0{,}627;$$

$$x_{\text{гарм}} = \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \cdot 3{,}304 \cdot 0{,}119}{3{,}304 + 0{,}119} = 0{,}230;$$

$$y_{\text{ар}} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{0{,}5 + 17{,}0}{2} = 8{,}75;$$

$$y_{\text{геом}} = \sqrt{y_1 \cdot y_n} = \sqrt{0{,}5 \cdot 17{,}0} = 2{,}92;$$

$$\text{y}_{\text{гарм}} = \frac{2\text{y}_1\text{y}_\text{n}}{\text{y}_1 + \text{y}_\text{n}} = \frac{2\cdot 0{,}5\cdot 17{,}0}{0{,}5+17{,}0} = 0{,}97.$$

Користуючись інтерполяційною формулою (Г.1), знайдемо:

$$\text{y}^*_{\text{ар}} = 0{,}5 + \frac{1{,}2-0{,}5}{1{,}457-3{,}304}(1{,}712 - 3{,}304) = 1{,}103;$$

$$y^*_{\text{геом}} = 2 + \frac{5-2}{0{,}382-0{,}903}(0{,}672 - 0{,}903) = 3{,}589;$$

$$y^*_{\text{гарм}} = 8 + \frac{12-8}{0{,}167-0{,}245}(0{,}230 - 0{,}245) = 8{,}769.$$

Знайдемо величини:

$$\varepsilon_2 = |\,\text{y}^*_{\text{ар}} - \text{y}_{\text{геом}}\,| = |1{,}103 - 2{,}92| = 1{,}817;$$

$$\varepsilon_3 = |\,\text{y}^*_{\text{ар}} - \text{y}_{\text{гарм}}\,| = |1{,}103 - 0{,}97| = 0{,}133;$$

$$\varepsilon_4 = |\,\text{y}^*_{\text{геом}} - \text{y}_{\text{ар}}\,| = |3{,}589 - 8{,}75| = 5{,}161;$$

$$\varepsilon_5 = |\,\text{y}^*_{\text{геом}} - \text{y}_{\text{геом}}\,| = |3{,}589 - 2{,}92| = 0{,}669;$$

$$\varepsilon_6 = |\,\text{y}^*_{\text{гарм}} - \text{y}_{\text{ар}}\,| = |8{,}769 - 8{,}75| = 0{,}019;$$

$$\varepsilon_7 = |\,\text{y}^*_{\text{гарм}} - \text{y}_{\text{гарм}}\,| = |8{,}769 - 0{,}97| = 7{,}799.$$

Оскільки $\varepsilon = min\{\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_7\} = \varepsilon_6 = 0{,}019$, то шукана емпірична формула матиме вигляд $y = a + \frac{b}{x}$.

Уведемо нові змінні $X = \frac{1}{x}$, $Y = y$ і отримаємо лінійну залежність

$$Y = a + b \cdot X$$

Відповідні дані приведено в таблиці Г.3

Таблиця Г.3

X	0,303	0,686	1,107	2,618	4,082	5,988	8,403
Y	0,5	1,2	2,0	5,0	8,0	12,0	17,0

Побудуємо в площині XOY точки (X_i, Y_i) та переконаємось, що вони лежать майже на прямій (рис. Г.1). Отже, вибір емпіричної формули зроблено вірно.

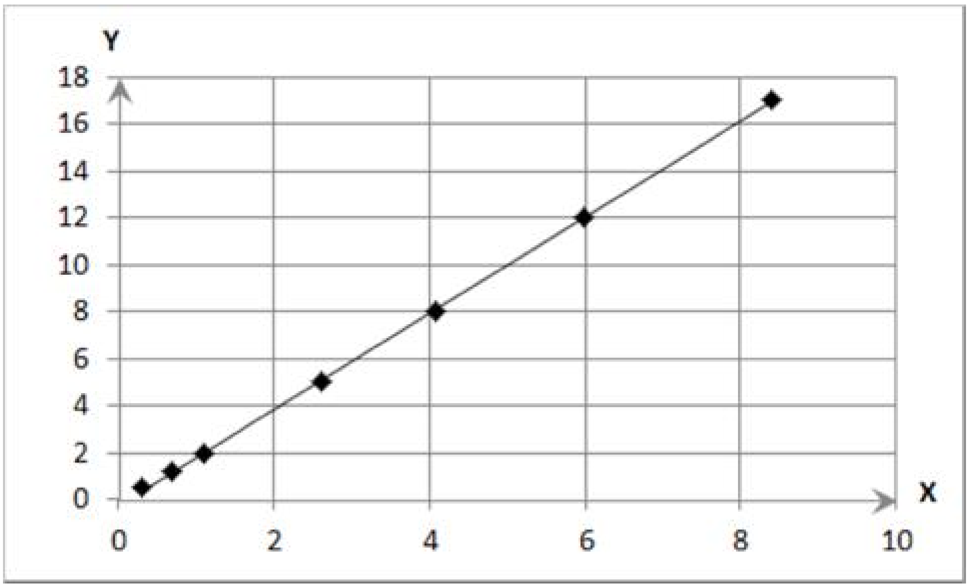

рис. Г.1

Параметри a та b визначимо методом найменших квадратів. Для визначення коефіцієнтів нормальної системи (1.10) складаємо табл.Г.4.

Тепер запишемо нормальну систему рівнянь:

Таблиця Г.4

i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i \cdot Y_i$
1	0,303	0,5	0,092	0,152
2	0,686	1,2	0,471	0,823
3	1,107	2,0	1,225	2,214
4	2,618	5,0	6,854	13,090
5	4,082	8,0	16,883	32,656
6	5,988	12,0	35,856	71,856
7	8,403	17,0	70,610	142,851
$\sum$	23,187	45,7	131,771	263,642

$$\begin{cases} 23{,}187 \cdot b + 7 \cdot a = 45{,}7 \\ 131{,}771 \cdot b + 23{,}187 \cdot a = 263{,}642. \end{cases}$$

Знайдемо a та b за формулами Крамера:

$$\mathrm{a} = 0{,}001, \qquad b = 1{,}97.$$

Відповідно, шукана емпірична формула матиме вигляд

$$y = 0{,}001 + \frac{1{,}97}{x}. \qquad (\Gamma.5)$$

Порівняння значень $\bar{y}$, отриманих за формулою з вихідними даними y, показано в таблиці Г.5.

Таблиця Г.5

x	y	$\bar{y}$	$\varepsilon = y - \bar{y}$	ε^2
0,304	0,5	0,6	-0,1	0,01
1,457	1,2	1,3	-0,1	0,01
0,903	2,0	2,2	-0,2	0,04
0,382	5,0	5,2	-0,2	0,04
0,245	8,0	8,0	0	0
0,167	12,0	11,8	0,2	0,04
0,119	17,0	16,6	0,4	0,16
			$\sum$	0,3

Середньоквадратичну похибку апроксимації визначаємо за формулою (1.13). Для розглядуваного прикладу отримаємо: $\sigma = \sqrt{\frac{0,3}{6}} \approx 0,02.$

Така похибка говорить про те, що знайдена емпірична формула (Г.5) достатньо добре апроксимує представлені в табл. Г.2 експериментальні дані.