МІНИСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

з кредитного модуля **ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ**

ДИСЦИПЛІНИ **ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ**

для студентів хіміко-технологічного факультету

напряму 6.051301 «Хімічна технологія»

Рекомендовано Вченою радою ХТФ

Київ 2014

Обчислювальна математика та програмування. Чисельні методи:метод. вказ. і завд. до практ. занять та самостійної роботи для студ. хіміко-технологічного факультету напряму 6.051301 «Хімічна технологія»/ - К: НТУУ «КПІ», 2014. - 86 с.

Автори: С.Г. Бондаренко, С.В. Брановицька, О.В. Сангінова

Гриф надано Вченою радою ХТФ,
протокол № 5 від 26 травня 2014 р.

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА МАТЕМАТИКА ТА ПРОГРАМУВАННЯ

методичні вказівки і завдання до практичних занять
та самостійної роботи студентів
з кредитного модуля **Чисельні методи**
дисципліни **Обчислювальна математика та програмування**
для студентів хіміко-технологічного факультету
напряму підготовки6.051301 «Хімічна технологія»

Автори: Бондаренко Сергій Григорович
Брановицька Слава Вікторівна
Сангінова Ольга Вікторівна

Відповідальний редактор: О.О. Квітка, к.х.н., доц.

Рецензент: В.І. Супрунчук, к.х.н., доц.

Зміст

Передмова 6

Практичне заняття № 1. Наближені числа 7

1.1 Короткі теоретичні відомості 7

1.2 Приклади розв’язання задач 11

1.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 1 13

1.4 Виконання роботи і оформлення результатів 15

Питання для самопідготовки 15

Практичне заняття № 2. Дії над наближеними числами 17

2.1 Короткі теоретичні відомості 17

2.2 Приклади розв’язання задач 18

2.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 2 21

2.4 Виконання роботи і оформлення результатів 28

Питання для самопідготовки 28

Практичне заняття № 3. Застосування інтерполяційної формули Лагранжа для прямого та оберненого інтерполювання 29

3.1 Короткі теоретичні відомості 29

3.2 Приклади розв’язання задач 30

3.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 3 31

3.4 Виконання роботи і оформлення результатів 33

Питання для самопідготовки 33

Практичне заняття № 4. Застосування інтерполяційних формул Ньютона для прямого та оберненого інтерполювання 34

4.1 Короткі теоретичні відомості 34

4.2 Приклади розв’язання задач 38

4.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 4 41
4.4 Виконання роботи і оформлення результатів 43
Питання для самопідготовки 43
Практичне заняття № 5. Чисельне диференціювання 44
5.1 Короткі теоретичні відомості 44
5.2 Приклади розв’язання задач 46
5.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 5 48
5.4 Виконання роботи і оформлення результатів 51
Питання для самопідготовки 51
Практичне заняття № 6. Вибір виду апроксимуючої залежності 52
6.1 Короткі теоретичні відомості 52
6.2 Приклади розв’язання задач 57
6.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 1 61
6.4 Виконання роботи і оформлення результатів 61
Питання для самопідготовки 62
Практичне заняття № 7. Методи систематизації статистичного матеріалу 63
7.1 Короткі теоретичні відомості 63
7.2 Приклади розв’язання задач 68
7.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 7 72
7.4 Виконання роботи і оформлення результатів 75
Питання для самопідготовки 76
Практичне заняття № 8. Лінійна кореляція 77
8.1 Короткі теоретичні відомості 77
8.2 Приклади розв’язання задач 81

8.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 8 83
8.4 Виконання роботи і оформлення результатів 85
Питання для самопідготовки 85
Список рекомендованої літератури 86

Передмова

Дисципліна «Обчислювальна математика та програмування» відноситься до нормативної частини циклу природничо-наукової підготовки і складається з двох кредитних модулів «Алгоритмізація та програмування» та «Чисельні методи». Робота студента над учбовим матеріалом з кредитного модуля «Чисельні методи» складається з наступних видів робіт: вивчення матеріалу по навчальних посібниках і підручниках; відвідування лекцій та практичних занять; виконання лабораторних робіт; написання модульної контрольної роботи; виконання та захист розрахунково-графічної роботи; індивідуальні консультації; здача екзамену. При цьому значна частина часу відводиться на самостійну роботу.

Дане видання призначено для надання допомоги студентам денної форми навчання напряму 6.051301 «Хімічна технологія» у вивченні кредитного модуля «Чисельні методи» вказаної дисципліни. З цією метою у даному виданні наведений перелік тем, які студент повинен вивчити за матеріалами лекцій, надані методичні вказівки до виконання практичних робіт, наведені основні теоретичні положення з ілюстрацією на конкретних прикладах. Методичні вказівки містять завдання для практичних робіт, вимоги до отриманих результатів і контрольні питання для самопідготовки.

Метою практичних занять є закріплення вмінь та досвіду, отриманих в процесі вивчення кредитного модулю «Числові методи». Матеріал практичних робіт спрямований на одержання досвіду використання чисельних методів для вирішення задач хімічної технології.

Практичне заняття № 1

Наближені числа

Мета роботи: Дослідити процес обчислення з використанням наближених чисел. Набути вмінь визначати похибки обчислень.

Задачі практичної роботи:

Вивчити поняття абсолютної і відносної похибок; вірних значущих цифр наближеного числа.

Розглянути зв'язок між кількістю вірних значущих цифр і похибкою наближеного числа..

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 1.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

1.1 Короткі теоретичні відомості

При вирішенні багатьох завдань хімії і хімічної технології зазвичай оперують з наближеними значеннями тих або інших величин (наближеними числами).

Наближеним називається число, яке трохи відрізняється від точного і замінює його в обчисленнях. Наближене число має практичну цінність лише тоді, коли можна вказати ступінь його точності, тобто оцінити його похибку.

Похибкою, або помилкою Δa наближеного числа a називається різниця між точним числом x і його наближеним значенням a:

$$\Delta a = x - a \,. \tag{1.1}$$

Якщо $x < a$, то $\Delta a < 0$; якщо $x > a$, то $\Delta a > 0$. У тих випадках, коли знак похибки не представляє інтересу, точність характеризують абсолютною похибкою.

Абсолютною похибкою Δ наближеного числа a називається абсолютна величина різниці між точним числом x і його наближеним значенням a:

$$\Delta = |x - a| \,. \tag{1.2}$$

Знайти абсолютну похибку Δ *за* формулою (1.2) не завжди можливо, оскільки точне число x найчастіше невідомо. В цьому випадку слід користуватися поняттям граничної абсолютної похибки. Гранична абсолютна похибка Δ_a наближеного числа a – це додатне число, що перевищує абсолютну похибку (або, в крайньому випадку, дорівнює їй):

$$\Delta = |x - a| \le \Delta_a \,. \tag{1.3}$$

Інакше кажучи, гранична абсолютна похибка – це число, що оцінює зверху абсолютну похибку наближеного числа *a*, тобто межу абсолютної похибки. Застосовують також наступну форму запису точного числа *x*:

$$x = a \pm \Delta_a . \tag{1.4}$$

Абсолютна і гранична абсолютна похибки є числами іменованими: вони виражаються в тих же одиницях (розмінностях), що і визначувана величина.

Знання абсолютної (або граничної абсолютної) похибки недостатньо для характеристики точності вимірювання або обчислення. В цьому випадку використовують поняття відносної або граничної відносної похибки.

Відносною похибкою d наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки Δ цього числа до модуля відповідного точного числа $x (x \neq 0)$:

$$d = \frac{\Delta}{|x|} . \tag{1.5}$$

Оскільки точне число зазвичай невідоме, його замінюють наближеним числом. Тоді

$$d = \frac{\Delta}{|a|} . \tag{1.6}$$

Звідси $\Delta = d \cdot |x|$, або $\Delta = d \cdot |a|$.

На практиці зазвичай мають справу з граничною відносною похибкою d_a, що є числом, яке перевищує відносну похибку (або в крайньому випадку дорівнює їй):

$$d \leq d_a . \tag{1.7}$$

Граничну відносну похибку d_a можна вважати рівною відношенню граничної абсолютної похибки Δ_a до модуля точного (або наближеного числа):

$$d_a = \frac{\Delta_a}{|x|} \tag{1.8}$$

або

$$d_a = \frac{\Delta_a}{|a|} . \tag{1.9}$$

Звідси $\Delta_a = d_a \cdot |x|$, або $\Delta_a = d_a \cdot |a|$.

Відносна і гранична відносна похибки не залежать від одиниць вимірювання відповідних величин і зазвичай виражаються у відсотках.

Значущими цифрами числа називають всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва. Наприклад, числа 0,003064 і 0,00306400 мають відповідно 4 і 6 значущих цифр (підкреслені цифри - значущі).

Правила округлення чисел. Щоб округлити число, точне або наближене, до *n* значущих цифр, відкидають всі цифри, що стоять праворуч від

n-ої значущої цифри, або якщо це потрібно для збереження розрядів, замінюють їх нулями. При цьому:

Якщо перша з цифр, які відкидають, менше за 5, то остання з цифр, що залишилась, не змінюється. Наприклад, при округленні числа 81,2347 до сотих доль, отримаємо 81,23.

Якщо перша з цифр, які відкидають, дорівнює 5 і серед наступних за нею цифр є відмінні від нуля, то останню з цифр, що залишилися, збільшують на одиницю. Наприклад, при округленні числа 46,2501 до десятих доль, отримаємо 46,3.

Якщо перша з цифр, які відкидають, дорівнює 5 і за нею слідують нулі, то остання з цифр, що залишилися:

- зберігається незмінною, якщо вона парна;
- збільшується на одиницю, якщо вона непарна (правило парної цифри).

Наприклад, при округленні числа 13,6500 до десятих доль, отримаємо 13,6, а при округленні числа 13,7500 до десятих доль отримаємо 13,8.

Якщо перша з цифр, які відкидають, більше за 5, то останню з цифр, що залишилися, збільшують на одиницю. Наприклад, при округленні числа 67,382 до десятих доль, отримаємо 67,4.

При округленні наближеного числа a отримуємо нове наближене число a_1, гранична абсолютна похибка Δ_{a1} якого дорівнює сумі граничної абсолютної похибки числа a і похибки округлення, тобто

$$\Delta_{a1} = \Delta_a + \Delta_{окр.} \qquad (1.10)$$

Вірні значущі цифри наближеного числа. Степінь точності наближеного числа характеризується числом його вірних значущих цифр.

Відомо, що всяке додатне число a може бути представлено у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу:

$$a = a_1 \cdot 10^m + a_2 \cdot 10^{m-1} + \mathbf{K} + a_n \cdot 10^{m-n+1} + \mathbf{K}, \qquad (1.11)$$

де $a_i (i = 1,2,\mathbf{K},n,\mathbf{K})$ цілі цифри числа *a*, причому $a_1 \neq 0$; m – деяке ціле число, що дорівнює степеню числа 10 старшого розряду числа *a*.

Наприклад, запишемо число $a = 0{,}02345$, відповідно до (1.11):

$$0{,}02345 = 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5},$$

тут $m = -2;\ a_1 = 2$;

для числа $a = 1{,}052$ отримаємо

$$1{,}052 = 1 \cdot 10^{0} + 0 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$$

і тут $m = 0;\ a_1 = 1$.

Із запису (1.11) видно, що значення одиниці *n*-го десяткового розряду дорівнює 10^{m-n+1}.

Наближене число *a* містить *n* вірних значущих цифр у вузькому сенсі, якщо абсолютна похибка Δ цього числа не перевищує половини одиниці десяткового розряду, що виражається *n*-ю значущою цифрою (рахуючи зліва направо), тобто якщо виконується нерівність

$$\Delta \leq 0{,}5 \cdot 10^{m-n+1}. \qquad (1.12)$$

Наближене число *a* містить *n* вірних значущих цифр у широкому сенсі, якщо абсолютна похибка Δ цього числа не перевищує одиниці десяткового розряду, що виражається *n*-ю значущою цифрою (рахуючи зліва направо), тобто якщо виконується нерівність

$$\Delta \leq 1 \cdot 10^{m-n+1}. \qquad (1.13)$$

За відомою абсолютною похибкою наближеного числа, використовуючи нерівності (1.12) та (1.13), можна визначити кількість вірних значущих цифр числа (у вузькому та широкому сенсі).

За кількістю вірних значущих цифр наближеного числа легко визначити його граничну абсолютну похибку, скориставшись нерівностями (1.12) та (1.13).

Також за числом вірних значущих цифр наближеного числа *a* можна визначити його граничну відносну похибку, скориставшись формулами:

$$d_a = \frac{1}{2a_1 \cdot 10^{n-1}} \quad \text{(якщо цифри вірні у вузькому сенсі)} \qquad (1.14)$$

і

$$d_a = \frac{1}{a_1 \cdot 10^{n-1}} \quad \text{(якщо цифри вірні у широкому сенсі).} \qquad (1.15)$$

де a_1 – перша значуща цифра наближеного числа; n– кількість вірних значущих цифр.

Також можна знайти кількість вірних значущих цифр числа a, якщо відома його гранична відносна похибка δ_a.

Зв'язок між граничною відносною похибкою δ_a та кількістю вірних значущих цифр n можна виразити нерівністю:

$$(1+a_1)\cdot d_a \le 10^{-s},$$
$$n = s+1, \qquad (1.16)$$

де s – найбільше числове значення показника степеню, для якого виконується нерівність (1.16).

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

1.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 1.1. Округлюючи число x до трьох значущих цифр, визначити абсолютну Δ і відносну δ похибки отриманих наближених чисел:

а) x = 4,3576; б) x = 0,03725.

Розв'язок:

а) Округлюючи число x = 4,3576 до трьох значущих цифр, отримаємо a = 4,36. Обчислимо абсолютну та відносну похибки за формулами (1.2) та (1.5): $\Delta = |x-a| = |4{,}3576 - 4{,}36| = 0{,}0024$;

$$d = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0{,}0024}{4{,}3576} = 5{,}508\cdot 10^{-4} = 0{,}055\%.$$

б) Округлюючи число x = 0,03725 до трьох значущих цифр, отримаємо a = 0,0372, звідки $\Delta = |x-a| = |0{,}03725 - 0{,}0372| = 0{,}00005 = 0{,}5\cdot 10^{-4}$;

$$d = \frac{\Delta}{|x|} = \frac{0{,}5\cdot 10^{-4}}{0{,}03725} = 0{,}00132 = 0{,}132\%.$$

Приклад 1.2.Визначити кількість вірних значущих цифр наближеного числа a = 18,452 (±0,013)

а) у вузькому сенсі; б) у широкому сенсі.

Розв'язок:

З умови видно, що $\Delta = 0{,}013$, $m = 1$.

а) щоб знайти кількість вірних значущих цифр у вузькому сенсі, перевіримо послідовно виконання умови (1.12) для $n = 1$, $n = 2, \ldots$:

для $n = 1$: $0{,}013 \le 0{,}5 \cdot 10^{1-1+1}$ - умова виконується,

для $n = 2$: $0{,}013 \le 0{,}5 \cdot 10^{1-2+1}$ - умова виконується,

для $n = 3$: $0{,}013 \le 0{,}5 \cdot 10^{1-3+1}$ - умова виконується,

для $n = 4$: $0{,}013 \le 0{,}5 \cdot 10^{1-4+1}$ - умова не виконується.

Отже, вірними значущими цифрами (у вузькому сенсі) наближеного числа a = 18,452 будуть три цифри - 1,8,4 (тобто n = 3);

б) аналогічно перевіримо послідовно виконання умови (1.13) для $n = 1$, $n = 2, \ldots$:

для $n = 1$: $0{,}013 \le 1 \cdot 10^{1-1+1}$ - умова виконується,

для $n = 2$: $0{,}013 \le 1 \cdot 10^{1-2+1}$ - умова виконується,

для $n = 3$: $0{,}013 \le 1 \cdot 10^{1-3+1}$ - умова виконується,

для $n = 4$: $0{,}013 \le 1 \cdot 10^{1-4+1}$ - умова не виконується.

Отже, вірними в широкому сенсі будуть цифри 1,8,4 (n = 3).

Приклад 1.3.Знайти граничні абсолютну й відносну похибки наближених чисел, якщо вони мають тільки вірні цифри:

а) a = 0,247 (у вузькому сенсі);

б) a = 36,79 (у широкому сенсі).

Розв'язок:

а) оскільки для числа a = 0,247 остання цифра 7, що стоїть в розряді тисячних часток, є вірною значущою цифрою, то n = 3. Для цього числа $m = -1$. Тоді гранична абсолютна похибка у вузькому сенсі $\Delta_\alpha = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ (бо $\Delta \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$);

гранична відносна похибка $d_a = \dfrac{1}{2 \cdot a_1 \cdot 10^{n-1}} = \dfrac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^2} = 0{,}0025 = 0{,}25\%$.

б) остання цифра 9 наближеного числа a = 36,79 стоїть у розряді сотих часток. Оскільки це число містить тільки вірні цифри, то n = 4. Для цього числа $m = 1$. Тоді гранична абсолютна похибка в широкому сенсі $\Delta_\alpha = 1 \cdot 10^{-2}$ (бо $\Delta \le 1 \cdot 10^{-2}$);

гранична відносна похибка $d_a = \frac{1}{a_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{3 \cdot 10^3} = 0{,}0003 = 0{,}03\%$.

Приклад 1.4. Скільки вірних значущих цифр треба враховувати при обчисленні $a = \sqrt{28}$, щоб гранична відносна похибка δ_a не перевищувала 0,2%?

Розв'язок:

За умовою a = $\sqrt{28}$ = 5,...; $\delta_a = 0{,}002$; $a_1 = 5$, тоді

$(1+5) \cdot 0{,}002 \le 10^{-s}$, $0{,}012 \le 10^{-s}$, звідки

найбільше значення показника степеня, для якого виконується нерівність (1.16), становить s = 1; тоді, кількість вірних значущих цифр $n = s + 1 = 2$.

1.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 1

Вихідні дані до задач 1-4 знаходяться в табл.1.1.

Таблиця 1.1.

Номер варіанту	Номер задачі			
	1	2	3	4
1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	а) 5,6483 б) 0,03845	22,553(±0,016)	а)0,2386 б)42,884	$\sqrt{30}$
2	а) -17,2834 б)0,096835	6,4257(±0,0024)	а)3,751 б)0,537	$\frac{4}{17}$
3	а)-0,0074181 б)48,625	0,5748(±0,0034)	а)0,00271 б)39,45	$\sqrt{52}$
4	а)831,56 б)0,001723	2,3485(±0,0042)	а)0,05842 б)856,37	$\sqrt{38}$
5	а)0,31456 б)-0,01275	5,435(±0,0028)	а)8,345 б)0,0288	$\sqrt{10}$
6	а)0,4125 б)-2,125	0,12356(±0,00036)	а)12,45 б)3,4453	$\sqrt{6.8}$
7	а)-1,7253 б)0,0012367	2,4543(±0,0032)	а)0,0374 б)4,348	$\sqrt{22}$
8	а)0,030152 б)-15,4531	8,3445(±0,0022)	а)20,43 б)0,576	$\sqrt{9{,}8}$
9	а)-67,45 б)0,0034653	3,7834(±0,0041)	а)41,723 б)0,0067	$\sqrt{83}$
10	а)-2,375 б)0,064251	13,537(±0,0026)	а)5,634 б)0,0748	$\sqrt{52}$

1	*2*	*3*	*4*	*5*
11	а)22,553 б)0,028546	13,6253(±0,0021)	а)18,357 б)2,16	$\sqrt{44}$
12	а)-41,345 б)0,010849	1,784(±0,006)	а)0,5746 б)236,58	$\sqrt{27}$
13	а)12,415 б)0,004523	3,6878(±0,0013)	а)14,862 б)0,0087	$\sqrt{31}$
14	а)1,1426 б)0,01015	39,285(±0,034)	а)0,7538 б)17,354	$\frac{7}{22}$
15	а)-392,85 б)0,003922	14,0023(±0,0001)	а)4,267 б)13,618	$\sqrt{18}$
16	а)-0,0014171 б)84,525	1,2785(±0,0007)	а)0,00416 б)12,03	$\sqrt{29}$
17	а)921,54 б)0,002462	32,285(±0,002)	а)0,01679 б)458,67	$\sqrt{11}$
18	а)0,16152 б)-0,01204	183,3(±0,1)	а)30,250 б)0,004361	$\sqrt{31}$
19	а)0,1245 б)-1,225	84,17(±0,0073)	а)7,1035 б)0,340	$\sqrt{22}$
20	а)-1,6152 б)0,0025272	0,0473(±0,0002)	а)0,0552 б)2,37	$\sqrt{19}$
21	а)0,010253 б)-12,3541	41,198(±0,028)	а)-139,2 б)0,099	$\sqrt{53}$
22	а)-47,45 б)0,0023554	14,0023(±0,0001)	а)602,25 б)0,00348	$\sqrt{26}$
23	а)-1,235 б)0,024154	29,374(±0,003)	а)-0,059 б)11,7502	$\sqrt{17}$
24	а)0,0030751 б)-1,025	2,1674(±0,0006)	а)0,5726 б)-23,704	$\sqrt{33}$
25	а)-31,405 б)0,07035	41,265(±0,033)	а)-30,024 б)475,6	$\sqrt{47}$
26	а)-81,255 б)0,0107234	482,56(±0,03)	а)-0,253 б)0,0052	$\sqrt{58}$
27	а)0,010253 б)0,03855	6,4257(±0,0024)	а)0,05842 б)856,37	$\sqrt{10}$
28	а)0,2386 б)11,445	6,4257(±0,0024)	а)0,0956 б)327,4	$\sqrt{87}$
29	а)0,34484 б)83,736	9,542(±0,001)	а)0,00443 б)15,638	$\sqrt{41}$
30	а)6,743 б)0,5748	7,345(±0,001)	а)0,0344 б)16,735	$\sqrt{63}$

1.4 Виконання роботи і оформлення результатів

1. Відповідно до отриманого індивідуального завдання виконати задачі 1-4 в середовищі MS Excel.

   Задача 1. Округлити число до трьох значущих цифр, визначити абсолютну і відносну похибки отриманого наближеного числа.

   Задача 2. Визначити кількість вірних значущих цифр наближеного числа: а) у вузькому сенсі; б) у широкому сенсі.

   Задача 3. Знайти граничну абсолютну і відносну похибки наближених чисел, якщо вони мають лише вірні цифри: а) у вузькому сенсі; б) в широкому сенсі.

   Задача 4. Визначити кількість вірних значущих цифр результату, якщо гранична відносна похибка не перевищує 0,2%.

Розрахунки виконати в MS Excel, а результати розрахунків представити у вигляді таблиці (в MS Excel).

№1				
	Число	Окр. знач.	Δ	δ
а)	…	…	…	…
б)	…	…	…	…
№2				
	Число	n-вуз.сенс	n-шир.сенс	
	…	…	…	
№3				
	Число	Δ	δ	
а)	…	…	…	Вуз.сенс
б)	…	…	…	Шир.сенс
№4				
	Число	δ	n-кільк. вір з.ц.	
	…	…	…	

Питання для самопідготовки

1. Поняття наближеного числа.
2. Які цифри в запису числа вважають значущими?
3. Правила округлення
4. Відносна й абсолютна похибки числа
5. Як знайти кількість вірних значущих цифр в записі числа, якщо відома його абсолютна похибка?

6. Як визначається абсолютна похибка числа при відомій кількості вірних значущих цифр цього числа.
7. Як знайти кількість вірних значущих цифр в запису числа, якщо відома його відносна похибка?
8. Як визначається відносна похибка числа при відомій кількості вірних значущих цифр цього числа?

Практичне заняття № 2

Дії над наближеними числами

Мета роботи: Дослідити процес визначення похибки складних виразів з використанням наближених чисел. Набути вмінь визначати похибки обчислень.

Завдання: Визначити: абсолютну та відносну похибку розрахунку за заданою формулою, в яку входять наближені числа.

Задачі практичної роботи:

Вивчити визначення похибок простих дій над наближеними числами.

Розглянути принципи оцінювання похибки наближеного значення величини, що отримана в результаті обчислень за формулою, яка містить не одну, а декілька дій.

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 2.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

2.1 Короткі теоретичні відомості

На практиці часто доводиться оцінювати похибку наближеного значення величин, отриманих в результаті обчислень за формулою, яка містить не одну, а декілька дій.

Для вирішення таких завдань необхідно послідовно застосовувати правила визначення похибок простих дій над наближеними числами (таблиця 2.1) і формулу (1.9) зв'язку абсолютної і відносної похибок.

Слід пам'ятати, що першою розглядається остання дія.

Таблиця 2.1.

№	Дія	Абсолютна/відносна похибка	Абсолютна/відносна похибка
1	додавання $u = a_1 + a_2 + \mathbf{K} + a_n$	$\Delta_u = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + \mathbf{K} + \Delta_{a_n}$	$d_u = \frac{\Delta_u}{\lvert u \rvert}$
2	віднімання $u = a_1 - a_2$	$\Delta_u = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}$	$d_u = \frac{\Delta_u}{\lvert u \rvert}$
3	множення $u = a_1 \cdot a_2 \cdot \mathbf{K} \cdot a_n$	$d_u = d_{a_1} + d_{a_2} + \mathbf{K} + d_{a_n}$	$\Delta_u = d_u \lvert u \rvert$
4	ділення $u = a_1 / a_2$	$d_u = d_{a_1} + d_{a_2}$	$\Delta_u = d_u \lvert u \rvert$
5	піднесення до степеня $u = a^n$ $u = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$d_u = n \cdot d_a$ $d_u = \frac{1}{n} \cdot d_a$	$\Delta_u = d_u \lvert u \rvert$

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

2.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 2.1. Визначити абсолютну та відносну похибку величини X, яка обчислюється за формулою:

$$X = \frac{a^2 + b}{\sqrt{ab}}$$

при a = 6,14 ± 0,01, b=9,43 ± 0,02.

Розв'язок:

Останньою дією є ділення чисельника на знаменник, тому (див. табл. 1.1) спочатку знаходимо відносну похибку величини X як суму відносних похибок чисельника і знаменника:

$$d_X = d_{чисельника} + d_{знаменника} = d_{a^2+b} + d_{\sqrt{ab}}.$$

Розглянемо окремо похибку чисельника

$$d_{a^2+b} = \frac{\Delta_{a^2+b}}{\left|a^2 + b\right|} =$$

(остання дія – додавання, тому переходимо до абсолютної похибки)

$$= \frac{\Delta_{a^2} + \Delta_b}{\left|a^2 + b\right|} =$$

(остання дія у першому доданку – піднесення до степеня, тому для цього доданку виконуємо еквівалентну заміну на відносну похибку за формулою зв'язку)

$$= \frac{d_{a^2}\left|a^2\right| + \Delta_b}{\left|a^2 + b\right|} = \frac{2d_a\left|a^2\right| + \Delta_b}{\left|a^2 + b\right|} =$$

(оскільки в умові задачі задано абсолютні похибки, то виконуємо еквівалентну заміну відносної похибку)

$$= \frac{2\frac{\Delta_a}{|a|}\left|a^2\right| + \Delta_b}{\left|a^2 + b\right|},$$

і знаменника:

$d_{\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}d_{ab} = \frac{1}{2}(d_a + d_b) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|}\right)$. Отже, відносна похибка величини X

$$d_X = \frac{2\frac{\Delta_a}{|a|}\left|a^2\right| + \Delta_b}{\left|a^2 + b\right|} + \frac{1}{2}(d_a + d_b),$$ а абсолютна $\Delta_X = d_X \cdot |X|$

Розрахуємо значення величини X, її абсолютну та відносну похибки:

$$X = \frac{6{,}14^2 + 9{,}43}{\sqrt{6{,}14 \cdot 9{,}43}} = 6{,}1937;$$

$$d_X = \frac{2\dfrac{0{,}01}{|6{,}14|}\left|6{,}14^2\right| + 0{,}02}{\left|6{,}14^2 + 9{,}43\right|} + \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}01}{|6{,}14|} + \frac{0{,}02}{|9{,}43|}\right) = 0{,}0049 = 0{,}49\%;$$

$$\Delta_X = 0{,}0049 \cdot |6{,}1937| = 0{,}0303.$$

Приклад 2.2. Визначити абсолютну та відносну похибку величини X, яка обчислюється за формулою:

$$X = a \cdot b^2 + \sqrt{c}$$

при a = 6,14 ± 0,01; b=9,43 ± 0,02; c=18,72± 0,03.

Розв'язок:

Останньою дією є додавання, тому (див. табл. 1.1) спочатку знаходимо абсолютну похибку величини X як суму абсолютних похибок доданків:

$\Delta_X = \Delta_{ab^2} + \Delta_{\sqrt{c}} =$ (остання дія у першому доданку – множення, а в другому – знаходження кореня, тому для кожного доданку виконуємо еквівалентну заміну на відносну похибку за формулою зв'язку)

$= d_{ab^2}\left|ab^2\right| + d_{\sqrt{c}}\left|\sqrt{c}\right| =$ За правилами (див. табл. 1.1) розкриємо відносні похибки:

$= (d_a + d_{b^2})\left|ab^2\right| + \frac{1}{2}d_c\left|\sqrt{c}\right| =$ (оскільки в умові задачі задано абсолютні похибки, то виконуємо еквівалентну заміну відносних похибок)

$= \left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{2\Delta_b}{|b|}\right)ab^2\left| + \frac{1}{2}\frac{\Delta_c}{|c|}\right|\sqrt{c}\left|\right.$ Тоді відносна похибка: $d_X = \frac{\Delta_X}{|X|}$

Розрахуємо значення величини X, її абсолютну та відносну похибки:

$$X = 6{,}14 \cdot 9{,}43^2 + \sqrt{18{,}72} = 550{,}3255;$$

$$\Delta_X = \left(\frac{0{,}01}{6{,}14} + \frac{2 \cdot 0{,}02}{9{,}43}\right)\left|6{,}14 \cdot 9{,}43^2\right| + \frac{1}{2}\frac{0{,}03}{|18{,}72|}\left|\sqrt{18{,}72}\right| = 3{,}2087;$$

$$d_X = \frac{3{,}2087}{|550{,}3255|} = 0{,}0058 = 0{,}58\%.$$

Приклад 2.3. Обчислити теплоємність твердого тіла на підставі даних вимірювання за способом змішення, тобто за формулою:

$$\mathrm{X} = \frac{(\mathrm{M}_1 + c\mathrm{M}_2)(t - t_0)}{\mathrm{M}(T - t)},$$

де M – маса тіла; M_1 – маса води; M_2 – маса калориметра з мішалкою; c – теплоємність калориметра; T – температура тіла; t_0 – початкова температура;t – остаточна температура води.

Результати виміру цих величин:

M = 165,4 ± 0,1 г; T = 99,93 ± 0,004°C;

M_1 = 440,3 ± 0,2 г; t_0 = 11,6 ± 0,05°C;

M_2 = 187,5 ± 0,1 г; t = 14,6 ± 0,05°C.

c = 0,094 ± 0,001;

Розв'язок:

Обчислимо значення теплоємності:

$$\mathrm{X} = \frac{(440{,}3 + 0{,}094 \cdot 187{,}5)(14{,}6 - 11{,}6)}{165{,}4(99{,}93 - 14{,}6)} = 0{,}0973$$

Отримаємо формулу для розрахунку відносної похибки:

$$d_x = d_{M_1+cM_2} + d_{t-t_0} + d_{M(T-t)} = \frac{\Delta_{M_1+cM_2}}{|M_1 + cM_2|} + \frac{\Delta_{t-t_0}}{|t - t_0|} + d_M + d_{T-t} =$$

$$= \frac{\Delta_{M_1} + \Delta_{cM_2}}{|M_1 + cM_2|} + \frac{\Delta_t + \Delta_{t_0}}{|t - t_0|} + \frac{\Delta_M}{|M|} + \frac{\Delta_{T-t}}{|T - t|} = \frac{\Delta_{M_1} + d_{cM_2}|cM_2|}{|M_1 + cM_2|} + \frac{\Delta_t + \Delta_{t_0}}{|t - t_0|} +$$

$$+ \frac{\Delta_M}{M} + \frac{\Delta_T + \Delta_t}{|T - t|} = \frac{\Delta_{M_1} + (d_c + d_{M_2})|cM_2|}{|M_1 + cM_2|} + \frac{\Delta_t + \Delta_{t_0}}{|t - t_0|} + \frac{\Delta_M}{|M|} + \frac{\Delta_T + \Delta_t}{|T - t|} =$$

$$= \frac{\Delta_{M_1} + \left(\frac{\Delta_c}{|c|} + \frac{\Delta_{M_2}}{|M_2|}\right)cM_2|}{|M_1 + cM_2|} + \frac{\Delta_t + \Delta_{t_0}}{|t - t_0|} + \frac{\Delta_M}{|M|} + \frac{\Delta_T + \Delta_t}{|T - t|}$$

і розрахуємо значення:

$$d_x = \frac{0{,}2 + \left(\frac{0{,}001}{|0{,}094|} + \frac{0{,}1}{|187{,}5|}\right)|0{,}094 \cdot 187{,}5|}{|440{,}3 + 0{,}094 \cdot 187{,}5|} + \frac{0{,}05 + 0{,}05}{|14{,}6 - 11{,}6|} + \frac{0{,}1}{|165{,}4|} + \frac{0{,}004 + 0{,}05}{|99{,}93 - 14{,}6|} =$$

≈0,035438≈3,5%.

Скористаємося формулою (1.9):

$$\Delta_X = d_X|X| = 0{,}035438 \cdot 0{,}0973 \approx 0{,}00344.$$

2.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 2

Комплект завдань №1

	Номер завдання		
	№1	**№2**	**№3**
	$x = \frac{a^2 - bc}{ab}$	$x = a^3c + b^2c^2$	$x = \sqrt{a^3 - bc}$
a	9,7 ± (0,02)	3,7 ± (0,01)	11,2 ± (0,02)
b	1,3 ± (0,01)	4,4 ± (0,03)	1,7 ± (0,001)
c	0,4 ± (0,001)	1,3 ± (0,01)	2,3 ± (0,01)

	Номер завдання		
	№4	**№5**	**№6**
	$x = \frac{ab + c^2}{c - b}$	$x = \frac{b^2 - ac}{bc}$	$x = \frac{(a + b^2)c}{a - b}$
a	6,12 ± (0,05)	1,33 ± (0,001)	3,9 ± (0,001)
b	2,7 ± (0,03)	12,3 ± (0,01)	2,7 ± (0,03)
c	9,1 ± (0,01)	4,18 ± (0,005)	0,9 ± (0,002)

	Номер завдання		
	№7	**№8**	**№9**
	$x = \frac{ab + \sqrt{c}}{b + c}$	$x = a^3\sqrt{b} + ac$	$x = a + b\sqrt{c} - c^2$
a	9,1 ± (0,01)	3,07 ± (0,005)	12,6 ± (0,02)
b	0,9 ± (0,002)	4,15 ± (0,001)	3,9 ± (0,01)
c	3,3 ± (0,02)	2,33 ± (0,002)	2,1 ± (0,01)

	Номер завдання		
	№10	**№11**	**№12**
	$x = \frac{(a - b)c^2}{abc}$	$x = a(bc - a^3)$	$x = a^3\sqrt{b} + b\sqrt[3]{c}$
a	4,16 ± (0,001)	6,13 ± (0,003)	1,32 ± (0,02)
b	2,07 ± (0,002)	24,2 ± (0,01)	3,01 ± (0,01)
c	1,94 ± (0,05)	12,1 ± (0,02)	4,25 ± (0,005)

	Номер завдання		
	№13	**№14**	**№15**
	$x = \sqrt{a^2b - abc}$	$x = (a - b)^2 + a\sqrt{c}$	$x = (a + b)^3 - b^2\sqrt{c}$
a	9,3 ± (0,005)	12,1 ± (0,01)	0,62 ± (0,001)
b	7,1 ± (0,003)	3,9 ± (0,02)	3,12 ± (0,005)
c	1,3 ± (0,001)	9,11 ± (0,005)	1,7 ± (0,01)

	Номер завдання		
	№16	**№17**	**№18**
	$x = a^2 + \sqrt{bc} - bc$	$x = (b-c)(a^2 + b^2)$	$x = c(ac+b) - \sqrt{a}$
a	6,12 ± (0,003)	0,95 ± (0,001)	2,6 ± (0,02)
b	2,4 ± (0,005)	14,2 ± (0,005)	4,07 ± (0,005)
c	1,7 ± (0,01)	4,3 ± (0,01)	11,03 ± (0,01)

	Номер завдання		
	№19	**№20**	**№21**
	$x = \frac{a + b^2 + ac}{a+b}$	$x = \frac{\sqrt{a+bc} - a}{a+b}$	$x = \frac{ab^2 + a^2c}{a+b+c}$
a	2,12 ± (0,02)	6,91 ± (0,001)	2,4 ± (0,01)
b	4,26 ± (0,01)	3,4 ± (0,005)	7,3 ± (0,02)
c	2,94 ± (0,02)	14,3 ± (0,01)	2,95 ± (0,03)

	Номер завдання		
	№22	**№23**	**№24**
	$x = \frac{a^3\sqrt{b} + bc}{a-b}$	$x = \frac{a^3b^2 + a\sqrt{c}}{a-b}$	$x = \frac{a^2b^3 - \sqrt{ac}}{a-c}$
a	8,9 ± (0,005)	4,7 ± (0,01)	5,8 ± (0,02)
b	1,76 ± (0,001)	2,11 ± (0,005)	1,7 ± (0,01)
c	3,6 ± (0,01)	5,11 ± (0,02)	2,3 ± (0,01)

	Номер завдання		
	№25	**№26**	**№27**
	$x = \frac{a+b}{\sqrt{a^2 + bc}}$	$x = \frac{a-b}{ab + b^2c}$	$x = \frac{a\sqrt{b} + bc}{b+c}$
a	3,12 ± (0,005)	12,6 ± (0,01)	11,6 ± (0,01)
b	4,25 ± (0,01)	4,7 ± (0,02)	4,3 ± (0,02)
c	1,08 ± (0,001)	1,64 ± (0,005)	5,4 ± (0,01)

	Номер завдання		
	№28	**№29**	**№30**
	$x = a^3b^5 + \sqrt{c}a^2$	$x = \sqrt{ab + bc} - c^2$	$x = c^2a + \sqrt{ab} - b^2$
a	1,76 ± (0,01)	9,6 ± (0,005)	3,12 ± (0,005)
b	1,64 ± (0,02)	1,12 ± (0,001)	1,6 ± (0,01)
c	4,11 ± (0,01)	1,64 ± (0,01)	7,4 ± (0,02)

Комплект завдань №2

Номери варіантів і вихідні дані для задачі 5

	№1	№2	№3
	$X=\left(\frac{(a+b)c-a}{m^2-n^2}\right)^2$	$X=\frac{m^3(a+b)-b^2}{c-n+m}$	$X=\frac{(c-n)^2+b}{\sqrt{(a+b)m}}$
a	4,3(±0,05)	13,5(±0,02)	2,754(±0,001)
b	17,21(±0,02)	3,7(±0,02)	11,7(±0,04)
c	8,2(±0,05)	34,5(±0,02)	10,536(±0,002)
m	12,417(±0,003)	4,22(±0,004)	0,56(±0,005)
n	8,378(±0,005)	23,725(±0,005)	6,32(±0,008)

	№4	№5	№6
	$X=\frac{(a+b^2)m}{\sqrt{c-nm}}$	$X=\frac{(a-b)c^2-\sqrt{a}}{b\sqrt{a}+\sqrt{m+n}}$	$X=\frac{am+b\sqrt{n}}{\sqrt{(c-n)m}}$
a	23,16(±0,02)	27,16(±0,006)	16,342(±0,001)
b	8,23(±0,005)	5,03(±0,01)	2,5(±0,03)
c	145,5(±0,08)	3,6(±0,02)	38,17(±0,02)
m	0,28(±0,006)	12,375(±0,004)	3,6(±0,04)
n	28,6(±0,1)	86,2(±0,05)	9,14(±0,005)

	№7	№8	№9
	$X=\frac{\sqrt{a^2-b^2}+m}{(m^2+n)c}$	$X=\sqrt{\frac{a(b-\sqrt{c})+cn}{(m-n)(c-a)}}$	$X=\frac{(a-b)^2+c^2}{m+nb^2}$
a	9,542(±0,001)	5,2(±0,04)	15,71(±0,005)
b	3,128(±0,002)	15,32(±0,01)	3,28(±0,02)
c	0,172(±0,001)	7,5(±0,05)	7,2(±0,01)
m	2,8(±0,03)	21,823(±0,002)	13,752(±0,001)
n	5,4(±0,02)	7,56(±0,003)	33,7(±0,03)

	№10	№11	№12
	$X=\frac{a^2+\sqrt{ab}+c^2}{a+(b-c)^2}$	$X=\frac{(c-b)(a+b)\sqrt{c}}{a^2-b}$	$X=\frac{c(ac-b)+\sqrt{a}}{a^2b(b+c)}$
a	6,32(±0,008)	2,043(±0,001)	5,8(±0,01)
b	12,413(±0,003)	0,82(±0,01)	0,65(±0,02)
c	7,18(±0,006)	4,2(±0,05)	1,1753(±0,0002)

	№13	№14	№15
	$X=\frac{\sqrt{ab+c^2}}{a(n-m)}$	$X=\frac{a(b+c)^2-mn}{a+\sqrt{m-n}}$	$X=\frac{(a-b)c^2}{m+n\sqrt{b}}$
a	7,312(±0,004)	2,13(±0,01)	186,7(±0,04)
b	18,4(±0,03)	7,5(±0,05)	72,5(±0,03)
c	20,2(±0,08)	8,37(±0,005)	3,42(±0,003)
m	10,8(±0,1)	16,825(±0,004)	26,7(±0,02)
n	16,2(±0,05)	5,205(±0,002)	11,234(±0,004)

	№16	№17	№18
	$X=\frac{(a-b)^2(m+n)}{m-\sqrt{c-d}}$	$X=\frac{a+b(m-n)d}{(m+n)\sqrt{c-b}}$	$X=\sqrt{\frac{a+c\sqrt{b}}{bc^2+d(m-n)}}$
a	8,537(±0,003)	3730(±0,5)	315,6(±0,05)
b	4,218(±0,001)	1150(±0,6)	6,32(±0,008)
c	33,4(±0,02)	3600(±0,5)	0,85(±0,003)
d	5,344(±0,003)	0,785(±0,002)	4,17(±0,004)
m	96,89(±0,0002)	0,046(±0,0005)	12,413(±0,003)
n	4,27(±0,01)	0,025(±0,0002)	9,317(±0,002)

	№19	№20	№21
	$X=\frac{a^2b+c\sqrt{n}}{m^2-n\sqrt{a}}$	$X=\frac{(a^2-cn)\sqrt{b-c^2}}{(m-n)^2+(m-a)^2}$	$X=\frac{a^2m-\sqrt{b-c}}{m^3+n^2+\sqrt{a}}$
a	11,8(±0,02)	14,7(±0,06)	9,36(±0,004)
b	7,4(±0,03)	41,4(±0,2)	10,82(±0,03)
c	5,82(±0,005)	3,78(±0,002)	2,786(±0,0006)
m	26,7(±0,03)	15,2(±0,04)	2,32(±0,02)
n	11,234(±0,004)	8,356(±0,003)	3,172(±0,001)

	№22	№23	№24
	$X=\frac{a^2+cb+b^2}{(a-b)^2+c\sqrt{a}}$	$X=\frac{a(b+c)^2-bca}{\sqrt{bc-a}+a\sqrt{c}}$	$X=\frac{(a+c)^2+c(a^2+b^2)}{\sqrt{b(a+c)}}$
a	7,27(±0,01)	9,0456(±0,0001)	2,654(±0,001)
b	5,25(±0,002)	5,61(±0,02)	11,8(±0,03)
c	0,678(±0,003)	18,3(±0,02)	3,7(±0,02)

	№25	№26	№27
	$X=\frac{\sqrt{a^2b+c}}{(m-n)^2+b^2}$	$X=\frac{n(am-cb)}{a^2(b+c)+\sqrt{n}}$	$X=\frac{an+m^2\sqrt{c}}{\sqrt{(c-b)(n-m)}}$
a	17,5(±0,03)	8,135(±0,001)	16,342(±0,001)
b	5,68(±0,005)	7,345(±0,001)	9,14(±0,005)
c	26,7(±0,03)	1,84(±0,006)	16,342(±0,001)
m	14,782(±0,006)	10,82(±0,03)	2,5(±0,03)
n	7,42(±0,003)	14,7(±0,06)	3,6(±0,04)

	№28	№29	№30
	$X=\frac{(a+bc)(m-n)}{\sqrt{b(a-c)}}$	$X=\frac{(a^2b-c)\sqrt{m-n}}{(n-c^2)a+\sqrt{b}}$	$X=\frac{m(a-b)^2+c^3}{(n-c)\sqrt{a}}$
a	315,6(±0,05)	6,3(±0,01)	78,32(±0,03)
b	0,56(±0,005)	10,312(±0,004)	55,18(±0,01)
c	186,7(±0,04)	8,17(±0,005)	3,47(±0,005)
m	26,3(±0,01)	215,6(±0,05)	2,18(±0,01)
n	10,312(±0,004)	186,7(±0,04)	5,63(±0,02)

Комплект завдань №3

№31. В’язкість аміаку розраховується за формулою Сатерленда:

$$N = N_0 \frac{A+C}{t*C} \cdot \left(\frac{t}{A}\right)^n,$$

A=273,15 (±0,1); C=503 (±0,5); t = 20 (±0,1); N_0=91,6·10^{-7} (±10^{-9}); n=2(±0,1).

№ 32. Ізобарна теплоємність CO_2 розраховується за формулою:

$$C_p = E + F\frac{T}{K} + G\frac{T}{K} + H^2\frac{T}{K} + N^3\frac{K}{T},$$

E=0,81513(±10^{-3}); T=293 (±0,1); K=100 (±0,1); F=9,8454·10^{-2} (±10^{-3});
G=-9,4747·10^{-3}(±10^{-5}); H=36,006·10^{-5} (±10^{-7}); N=-0,0567 (±0,001).

№ 33. Теплопровідність аміаку розраховується за формулою:

$$L = A \cdot \frac{T_K + C}{T + C} \cdot \frac{\sqrt{T^3}}{\sqrt{T_K^3} \cdot \sqrt[6]{M^5}},$$

A=4,3543·10^{-3}(±10^{-5}); C=503(±0,1); TK=239,73(±0,1); T=300(±0,1);
M – молекулярна маса газу (±0,1).

№ 34. Густина повітря розраховується за формулою:

$$R = \frac{A \cdot P}{(k + B \cdot t) \cdot c},$$

P=105,2 (±0,1), A=1,293 (±0,01), B = 3,67·10^{-3}(±10^{-5}); C = 760 (±0,1);
t =20 (±0,1); k=1 (±0,1).

№ 35. Значення критерію Архімеда розраховується за формулою:

$$Ar = \frac{g \cdot d_{\min}^3}{n^2}\left(\frac{r_T - r_\Gamma}{r_\Gamma}\right),$$

g=9,81(±0,01); ρ_T =1300(±1); ρ_Γ =0,571(±0,02); ν =53,1·10^{-6}(±10^{-7}),
d_{min}=0,0015 (±10^{-5}).

№ 36. Значення критерію Рейнольдса розраховується за формулою:

$$\mathrm{Re} = \frac{(w_1 + w_2)\cdot d_э\, r}{m},$$

w_1 = 0,15 (±10^{-5}); w_2 = 0,12 (±3·10^{-5}); $d_э$ =0,015 (±3·10^{-6}); r =984 (±0,5); m =0,54○10^{-3} (±10^{-7}).

№ 37. Значення критерію Галілея розраховується за формулою:

$$Ga = \frac{(H_1 + H_2)^3 r^2 g}{m^2},$$

H_1 =0,8○10^{-3} (±0,1○10^{-4}); H_2 =0,7○10^{-3} (±0,2○10^{-4}); ρ=1630 (±0,6); g=9,81 (±0,01); μ=0,84○10^{-3}(±10^{-5}).

№ 38. Зміна тиску в системі манометричного газового термометра розраховується за формулою:

$$p_t = p_0[k + b(t - t_0)],$$

p_0=5,46(±10^{-2}); k=1(±0,01); t=40(±0,1); t_0=20(±0,1); β=0,366·10^{-2}(±10^{-3}).

№ 39. Зміна опору у платиновому термоперетворювачі розраховується за формулою:

$$R_t = R_0(k + a\cdot t + b\cdot t^2),$$

R_0=50(±0,1); k=1(±0,01); α=3,95·10^{-3}(±10^{-5}); β=5,85·10^{-7}(±10^{-9}); t=20 (±0,1).

№ 40.

$$n = A - B\cdot(t - C) + D\cdot(t - C)^2,$$

A=1,06 (±0,01); B=1,04·10^{-4}(±10^{-6}); t = 20 (±0,1); C= 273,15 (±0,1); D=0,1·10^{-7}(±10^{-9}).

2.4 Виконання роботи і оформлення результатів

Обчислити в MS Excel значення X і визначити абсолютну і відносну похибки при обчисленні за формулою.

Надати для перевірки виведення залежності для визначення абсолютної або відносної похибки при розрахунках за заданою формулою.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Похибки суми і різниці наближених чисел?
2. Похибка добутку і результату ділення наближених чисел?
3. Похибка кореня та степеня наближеного числа?
4. Алгоритм визначення похибок при розрахунках за формулами.

Практичне заняття № 3

Застосування інтерполяційної формули Лагранжа для прямого та оберненого інтерполювання

Мета роботи: Дослідити процес отримання наближеного значення табличної функції в точках, відмінних від вузлових, за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа. Набути вмінь проведення інтерполяційних та екстраполяційних розрахунків.

Завдання: Визначити за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа значення функції в точках, відмінних від вузлових.

Задачі практичної роботи:

Вивчити інтерполяційну формулу Лагранжа.

Розглянути поняття інтерполяції, екстраполяції та зворотної інтерполяції..

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 3.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

3.1 Короткі теоретичні відомості

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа, який приймає у вузлах інтерполяції $x_0, x_1, \mathbf{K}\, x_n$ відповідно значення $y_0, y_1, \mathbf{K}\, y_n$ може бути записаний у такий спосіб:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\mathbf{K}(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\mathbf{K}(x_0-x_n)} + \\ + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\mathbf{K}(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\mathbf{K}(x_1-x_n)} + \mathbf{K} + \\ + y_i \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\mathbf{K}(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\mathbf{K}(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\mathbf{K}(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\mathbf{K}(x_i-x_n)} + \mathbf{K} + \\ + y_n \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\mathbf{K}(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\mathbf{K}(x_n-x_{n-1})} \end{aligned} \tag{3.1}$$

або в скороченому вигляді:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\mathbf{K}(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\mathbf{K}(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\mathbf{K}(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\mathbf{K}(x_i-x_n)}. \tag{3.2}$$

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа можна побудувати при будь-якому розташуванні вузлів інтерполяції і застосовувати його як для інтерполяції функцій, так і для екстраполяції.

Зворотна інтерполяція

Завдання зворотної інтерполяції для функції $y = f(x)$ (заданої таблично) полягає в тому, щоб по заданому значенню функції y визначити відповідне значення аргументу x. При застосуванні інтерполяційної формули Лагранжа достатньо прийняти y за незалежну змінну (аргумент), а x вважати функцією. Тоді отримаємо:

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{i-1})(}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\ldots(y_i-y_{i-1})(}. \qquad (3.3)$$

Інтерполяційна формула Лагранжа дозволяє виконувати зворотне інтерполювання (екстраполювання) при будь-якому розташуванні вузлів інтерполяції.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

3.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 3.1. Об'єм 1 кг газу при $t = 0$ змінюється залежно від тиску наступним чином:

P, мм рт. ст.	673	473,1	361,6
V, л	60	65	70

Визначити об'єм 1 кг газу при p=500 мм рт.ст.

Розв'язок. Позначимо $x = P$, $y = V$. Оскільки число вузлів інтерполяції дорівнює трьом ($x_0 = p_0 = 673$; $x_1 = p_1 = 473{,}1$; $x_2 = p_2 = 361{,}6$), то степінь багаточлена Лагранжа дорівнюватиме двом ($n = 2$). Формула (4.2) набуває вигляду:

$$P_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

.

Враховуючи, що в нашому випадку $y_0 = v_0 = 60$, $y_1 = v_1 = 65$, а $y_2 = v_2 = 70$, запишемо:

$$P_2(x) = 60 \cdot \frac{(500-473{,}1)(500-361{,}6)}{(673-473{,}1)(673-361{,}6)} + 65 \cdot \frac{(500-673)(500-361{,}6)}{(473{,}1-673)(473{,}1-361{,}6)} +$$

$$+ 70 \cdot \frac{(500-673)(500-473{,}1)}{(361{,}6-673)(361{,}6-473{,}1)} = 64{,}03.$$

Таким чином, об'єм 1 кг газу при р = 500 мм рт. ст. дорівнює 64,03 л.

Приклад 3.2. Задана таблична функція.

x	2	5	9
y	10	20	30

Визначити, при якому значенні **x** функція приймає значення $y = 15$. $\mathbf{y = 15}$

Розв'язок:

Оскільки число вузлів інтерполяції дорівнює трьом, то степінь багаточлена Лагранжа буде дорівнювати двом ($n = 2$). Формула (4.10) набуває вигляду:

$$P_2(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}x_1 + \frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}x_2.$$

Підставимо необхідні значення:

$$P_2(15) = \frac{(15-20)(15-30)}{(10-20)(10-30)}2 + \frac{(15-10)(15-30)}{(20-10)(20-30)}5 + \frac{(15-10)(15-20)}{(30-10)(30-20)}9 \approx 3{,}375.$$

3.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 3

Для заданої таблично функції (табл.3.1) знайти її значення в заданих точках:

Таблиця 3.1

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5
y	1,25	5,25	11,25	19,25	29,25	41,25	55,25	71,25	89,25	109,25	131,25

варіант 1 Визначити y при x=1,2; x=4,9. Визначити x при y=20.

варіант 2 Визначити y при x=1,9; x=10,1. Визначити x при y=25.

варіант 3 Визначити y при x=3,9; x=12,1. Визначити x при y=105.

варіант 4 Визначити y при x=11,9; x=2,1. Визначити x при y=40,5.

варіант 5 Визначити y при x=5,7; x= 9,7. Визначити x при y=30,8.

варіант 6 Визначити y при x=25,3; x= 10,7. Визначити x при y=103,4.

варіант 7 Визначити y при x=2,3; x= 11,7. Визначити x при y=130,4.

варіант 8 Визначити y при x=52,9; x= 11,7. Визначити x при y=130,4.

варіант 9 Визначити y при x=12,1; x= 3,7. Визначити x при y=14.

варіант 10 Визначити y при x=5; x= 7. Визначити x при y=104.

Для заданої таблично функції (табл.3.2) знайти її значення в заданих точках:

Таблиця 3.2

x	3.2	5.2	7.2	9.2	11.2	13.2	15.2	17.2	19.2	21.2	23.2
y	5.92	3.76	2.80	2.25	1.90	1.66	1.48	1.34	1.23	1.14	1.07

варіант 11 Визначити y при x=4,2; x=14,9. Визначити x при y=2,0.

варіант 12 Визначити y при x=2,9; x=20,5. Визначити x при y=1,5.

варіант 13 Визначити y при x=3,9; x=18,1. Визначити x при y=1,05.

варіант 14 Визначити y при x=11,9; x=22,1. Визначити x при y=4,05.

варіант 15 Визначити y при x=15,7; x= 19,7. Визначити x при y=3,08.

варіант 16 Визначити y при x=15,3; x= 8,7. Визначити x при y=1,03.

варіант 17 Визначити y при x=17,3; x= 2,7. Визначити x при y=1,4.

варіант 18 Визначити y при x=9,9; x= 16,7. Визначити x при y=1,3.

варіант 19 Визначити y при x=13,1; x= 3,8. Визначити x при y=6.

варіант 20 Визначити y при x=6; x= 17. Визначити x при y=4.

Для заданої таблично функції (табл.3.3) знайти її значення в заданих точках:

Таблиця 3.3

x	2.2	3.8	5.4	7	8.6	10.2	11.8	13.4	15	16.6	18.2
y	1.88	2.50	3.37	4.58	6.27	8.63	11.93	16.52	22.92	31.85	44.31

варіант 21 Визначити y при x=5,2; x=14. Визначити x при y=2,9.

варіант 22 Визначити y при x=2,1; x=15,5. Визначити x при y=1,7.

варіант 23 Визначити y при x=6,9; x=18,3. Визначити x при y=15,5.

варіант 24 Визначити y при x=11,9; x=2,15. Визначити x при y=4,1.

варіант 25 Визначити y при x=15,7; x= 9,7. Визначити x при y=3,08.

варіант 26 Визначити y при x=15,3; x= 8,7. Визначити x при y=12,03.

варіант 27 Визначити y при x=17,3; x=9,7. Визначити x при y=6,4.

варіант 28 Визначити y при x=9,2; x= 16,1. Визначити x при y=14,3.

варіант 29 Визначити y при x=13,1; x= 7,8. Визначити x при y=6.

варіант 30 Визначити y при x=6; x= 19. Визначити x при y=14.

3.4 Виконання роботи і оформлення результатів

Обчислити в MS Excel значення функції в заданих точках.

Обчислити в MS Excel значення аргументу, при якому функція приймає вказане значення.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Відмінність інтерполяції функцій від екстраполяції.
2. При якому розташуванні вузлів інтерполяції застосовують інтерполяційну формулу Лагранжа?
3. Як знайти похибку інтерполяційної формули Лагранжа?
4. Вигляд інтерполяційної формули Лагранжа для лінійної інтерполяції?
5. Вигляд інтерполяційної формули Лагранжа для квадратичної інтерполяції.
6. Зворотна інтерполяція за інтерполяційною формулою Лагранжа.

Практичне заняття № 4

Застосування інтерполяційних формул Ньютона для прямого та оберненого інтерполювання

Мета роботи: Дослідити процес отримання наближеного значення табличної функції в точках, відмінних від вузлових, за допомогою інтерполяційних формул Ньютона. Набути вмінь проведення інтерполяційних та екстраполяційних розрахунків.

Завдання: Визначити за допомогою інтерполяційних формул Ньютона значення функції в точках, відмінних від вузлових.

Задачі практичної роботи:

Вивчити інтерполяційні формули Ньютона.

Вивчити поняття кінцевих різниць.

Розглянути поняття інтерполяції, екстраполяції та зворотної інтерполяції.

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 4.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

4.1 Короткі теоретичні відомості

Інтерполяційні формули Ньютона

Нехай функція $y = f(x)$ задана у табличному вигляді своїми значеннями

$y_0 = f(x_0),\quad y_1 = f(x_1),\ \mathbf{K},\ y_n = f(x_n)$

у рівновіддалених вузлах інтерполяції, тобто $x_k - x_{k-1} = h\ \ (k = 1,2,\mathbf{K}n)$, де h – крок інтерполяції.

У цьому випадку доцільно користуватися інтерполяційними формулами Ньютона. Перш ніж їх розглядати, познайомимося з дуже важливим поняттям скінченних різниць.

Скінченною різницею першого порядку називають різницю між значеннями функції в сусідніх вузлах інтерполяції:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0;\qquad \Delta y_1 = y_2 - y_1;\mathbf{K}\ \ ;\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$

Зі скінченних різниць першого порядку можна одержати скінченні різниці другого порядку:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$; $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$; **К** ; $\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$.

Скінченні різниці n-го порядку визначаються за формулами

$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$; $\Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1$; **К** ; $\Delta^n y_{k-1} = \Delta^{n-1} y_k - \Delta^{n-1} y_{k-1}$.

Скінченні різниці різних порядків зручно розташовувати у формі таблиць двох видів: горизонтальної (таблиця 4.1) або діагональної (таблиця 4.2).

Таблиця 4.1. Горизонтальна

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2		
x_3	y_3			

Таблиця 4.2. Діагональна

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$
		Δy_2		
x_3	y_3			

Перша інтерполяційна формула Ньютона

Обчислення значень функції $y = f(x)$ для значень аргументу, що лежать у першій половині таблиці, зручно проводити, користуючись першою інтерполяційною формулою Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + \mathbf{К} + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\mathbf{К}(x - x_{n-1}). \qquad (4.1)$$

На практиці часто застосовують формулу (4.1) в іншому виді

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \\ + \mathbf{К} + \frac{q(q-1)(q-2)\mathbf{К}(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (4.2)$$

де $q = \frac{x - x_0}{h}$ являє собою кількість кроків, які необхідно зробити для досягнення точки x, виходячи із точки x_0.

Якщо у формулі (4.2) покласти $n = 1$, то отримаємо формулу лінійної інтерполяції:

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0. \qquad (4.3)$$

При $n = 2$ матимемо формулу параболічної або квадратичної інтерполяції:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 . \qquad (4.4)$$

При застосуванні першої інтерполяційної формули Ньютона зручно користуватися горизонтальною таблицею скінченних різниць (таблиця 4.1), тому що в цьому випадку потрібні значення скінченних різниць функції перебувають у відповідному горизонтальному рядку таблиці. Степінь n полінома $P_n(x)$ звичайно вибирають так, щоб скінченні різниці $\Delta^n y_i$ були постійними із заданим ступенем точності. За початкове значення x_0 приймають те з табличних значень аргументу, яке є найбільш близьким до заданого x.

Друга інтерполяційна формула Ньютона

Для інтерполяції наприкінці таблиці (у другій половині таблиці) доцільно застосовувати другу інтерполяційну формулу Ньютона:

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!h^3}(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) + \\ + \mathbf{K} + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\mathbf{K}(x-x_1). \qquad (4.5)$$

На практиці часто застосовують формулу (4.5) в іншому вигляді, прийнявши $q = \frac{x - x_n}{h}$:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \\ + \mathbf{K} + \frac{q(q+1)(q+2)\mathbf{K}(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.6)$$

При застосуванні другої інтерполяційної формули Ньютона зручно користуватися горизонтальною таблицею скінченних різниць. Степінь n полінома $P_n(x)$ звичайно вибирають так, щоб скінченні різниці $\Delta^n y_i$ були постійними із заданим ступенем точності. За початкове значення x_n приймають те з табличних значень аргументу, яке є найбільш близьким до заданого x.

Обидві інтерполяційні формули Ньютона можуть бути використані як для інтерполяції, так і для екстраполяції функції, тобто для знаходження значень функції y для значень аргументів x, що лежать поза межами таблиці. Якщо $x < x_0$ і x близько до x_0, то застосовують першу інтерполяційну формулу Ньютона, причому тоді

$$q = \frac{x - x_0}{h} < 0$$

.

Якщо ж $x > x_n$ і x близько до x_n, то користуються другою інтерполяційною формулою Ньютона, причому

$$q = \frac{x - x_n}{h} > 0$$

.

Таким чином, перша інтерполяційна формула Ньютона зазвичай використовується для інтерполяції вперед й екстраполяції назад, а друга інтерполяційна формула Ньютона, навпаки, - для інтерполяції назад й екстраполяції вперед.

Зворотна інтерполяція

Завдання зворотної інтерполяції для функції $y = f(x)$ (заданої таблично) полягає в тому, щоб по заданому значенню функції y визначити відповідне значення аргументу x.

Розглянемо рішення задачі зворотної інтерполяції з використанням інтерполяційних формул Ньютона (рівновіддалені вузли інтерполяції).

Нехай потрібно знайти значення x біля точки y_0. Скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона (4.2).

Пам'ятаємо, що: $q = \frac{x - x_0}{h}$

Знайдемо з формули (4.5) q:

$$q = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta y_0}\, q(q-1) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\,\Delta y_0}\, q(q-1)\ldots(q - \text{-}. \qquad (4.7)$$

Отже, отримаємо ітераційну залежність виду: $q = j\,(q) q = \varphi(q)$.

З неї величину q можна визначити за методом ітерацій:

$$q_i = \varphi(q_{i-1}) \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

За початкове наближення q_0 (нульове) приймемо:

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}.$$

Для і-го наближення:

$$q_i = q^0 - \frac{\Delta^2 y^0}{2!\ \Delta\, y^0} q_{i-1}(q_{i-1} - 1) - \cdots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\,\Delta y_0} q_{i-1}. \qquad (4.8)$$

Процес ітерацій продовжують доти, доки не виконається умова:

$$| q_{i+1} - q_i | \leq \varepsilon.$$

Тоді, позначивши $q^* = q_{i+1}$ $q^* = q_{i+1}$ і визначивши q^*, знаходимо x:

$$\frac{x - x_0}{h} = q^* \Rightarrow x = x^0 + q^*\, h. \qquad (4.9)$$

Аналогічно можна розглянути і задачу зворотної інтерполяції з використанням другої інтерполяційної формули Ньютона (4.6).

Знайдемо з цієї формули q:

$$q = \frac{y - y_n}{\Delta y_{n-1}} - \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! y_{n-1}} q(q+1) - \mathbf{K} - \frac{\Delta^n y_0}{n! y_{n-1}} q(q+1)\mathbf{K}(q+n-1). \qquad (4.10)$$

$$- \frac{q(q+1)}{2!\Delta y_{n-1}} \Delta^2 y_{n-2} - \ldots - \frac{q(q}{}$$

По аналогії з першою інтерполяційною формулою Ньютона отримаємо ітераційну залежність: $q = j(q)$ $\mathbf{q = \varphi(q)}$.

Величину q визначатимемо за методом ітерацій:

$$q_i = \varphi(q_{i-1}) \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

За початкове (нульове) наближення приймемо q_0:

$$q^0 = \frac{y - y_n}{\Delta y_n^{-1}}.$$

Для і-го наближення:

$$q_i = q_0 - \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! y_{n-1}} q_{i-1}(q_{i-1}+1) - \mathbf{K} - \frac{\Delta^n y_0}{n! y_{n-1}} q_{i-1}(q_{i-1}+1)\mathbf{K}(q_{i-1}+n-1) \qquad (4.11)$$

$$\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,\Delta y_{n-1}} q_{i-1}(q_{i-1}+1) - \cdots - \frac{\Delta^n y_0}{n!\,\Delta y_{n-1}} q_{i-1}(q_{i-1}+1) \ldots (q_{i-1}.$$

І далі по аналогії. Процес ітерацій продовжують доти, доки не виконається умова:

$$| q_{i+1} - q_i | \leq \varepsilon.$$

Позначивши $q^* = q_{i+1}$ і визначивши q: $q = \frac{x - x_n}{h}$, знаходимо x за формулою: $x = x_n + q \cdot h$ $\mathbf{x = x_n + qh}$.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

4.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. В'язкість води залежить від температури таким чином:

$t(^\circ C)$	10	13	16	19	22
$h(спз)$	1,308	1,203	1,111	1,030	0,958

Визначити, яка в'язкість води при: а) $t = 20$; б) $t = 12$; в) $t = 9$.

Розв’язок. Побудуємо горизонтальну таблицю скінченних різниць (таблиця 4.3), прийнявши позначення: $x = t;\quad y = h$.

Таблиця 4.3

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
10	1,308	-0,105	0,013	-0,002
13	1,203	-0,092	0,011	-0,002
16	1,111	-0,081	0,009	
19	1,030	-0,072		
22	0,958			

Як видно з таблиці 4.3, скінченні різниці третього порядку постійні, тому ними обмежимося, отже, n=3.

а) Скористаємося другою інтерполяційною формулою Ньютона (4.9), для чого знайдемо

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{20 - 22}{3} = -\frac{2}{3}; \qquad (x = 20; \quad x_n = 22; \quad y_n = 0{,}958; \quad h = 3).$$

Підставивши з таблиці 4.3 у формулу (4.9) двічі підкреслені різниці, одержимо

$$P_3(20) = 0{,}958 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-0{,}072) + \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}009 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot(0{,}002) = 1{,}005$$

.

б) Скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона (4.5), для чого знайдемо

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{12 - 10}{3} = \frac{2}{3}; \quad (x = 12; \quad x_0 = 10; \quad y_0 = 1{,}308; \quad h = 3).$$

Підставивши у формулу (4.5) підкреслені різниці з таблиці 4.3, одержимо

$$P_3(12) = 1{,}308 + \frac{2}{3}\cdot(-0{,}105) + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 0{,}013 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot(-0{,}002) = 1{,}237$$

.

в) Скористаємося формулою (4.5) для екстраполяції назад.

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{9 - 10}{3} = -\frac{1}{3};\ (x = 9; \quad x_0 = 10; \quad y_0 = 1{,}308; \quad h = 3).$$

Підставивши у формулу (4.5) з таблиці 4.3 підкреслені різниці, одержимо

$$P_3(9) = 1{,}308 + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(0{,}105) + \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}0{,}013 +$$

$$+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot(-0{,}002) = 1{,}346.$$

Приклад 4.2. Задана таблична функція:

x	1,0	1,2	1,4
y	35	55	63

Визначити, при якому значенні x функція приймає значення $y = 40$. Точність ε = 0,005. Вузли інтерполяції рівновіддалені. Значення y знаходиться біля точки y_0.

Розв'язок.

Скористаємося першою інтерполяційною формулою Ньютона.

Побудуємо горизонтальну таблицю скінченних різниць:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
1.0	35	20	-12
1.2	55	8	
1.4	63		

Визначимо q_0

$$q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}; \qquad q_0 = \frac{40-35}{20} = 0{,}25.$$

Порядок інтерполяційної формули Ньютона уданому прикладі n=2. Тоді:

$$q_1 = q_0 - \frac{\Delta^2 y^0}{2!\ \Delta y^0} q_0 (q_0 - 1) = 0{,}25 - \frac{-12}{2 \cdot 20} \cdot 0{,}25 \cdot (0{,}25 - 1) = 0{,}1938.$$

$$q_2 = q_0 - \frac{\Delta^2 y^0}{2!\ \Delta y^0} q_1 (q_1 - 1) = 0{,}25 - \frac{-12}{2 \cdot 20} \cdot 0{,}1938 \cdot (0{,}1938 - 1) = 0{,}2031.$$

$$q_3 = q_0 - \frac{\Delta^2 y^0}{2!\ \Delta y^0} q_2 (q_2 - 1) = 0{,}25 - \frac{-12}{2 \cdot 20} \cdot 0{,}2031 \cdot (0{,}2031 - 1) = 0{,}2014.$$

q_4 =0,2017.

$|0{,}2017 - 0{,}2014| \le 0{,}005$.

Таким чином: $x = x_0 + qh$ = 1,0 + 0,2017·0,2 = 1,0404.

4.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 4

Для заданої таблично функції (табл.4.1) знайти її значення в заданих точках:

Таблиця 4.1

x	2.2	3.8	5.4	7	8.6	10.2	11.8	13.4	15	16.6	18.2
y	1.88	2.50	3.37	4.58	6.27	8.63	11.93	16.52	22.92	31.85	44.31

варіант 1 Визначити y при x=3,2; x=16. Визначити x при y=4,9.

варіант 2 Визначити y при x=12,1; x=1,95. Визначити x при y=1,8.

варіант 3 Визначити y при x=7,9; x=17,3. Визначити x при y=15.

варіант 4 Визначити y при x=10,9; x=18,5. Визначити x при y=14,1.

варіант 5 Визначити y при x=1,7; x= 9,6. Визначити x при y=9,8.

варіант 6 Визначити y при x=12,3; x= 5,7. Визначити x при y=12,3.

варіант 7 Визначити y при x=17,3; x=2,7. Визначити x при y=6,4.

варіант 8 Визначити y при x=9,2; x= 18,1. Визначити x при y=15,3.

варіант 9 Визначити y при x=12,1; x= 2,8. Визначити x при y=8.

варіант 10 Визначити y при x=16; x= 9. Визначити x при y=44,4.

Для заданої таблично функції (табл.4.2) знайти її значення в заданих точках:

Таблиця 4.2

x	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5
y	1,25	5,25	11,25	19,25	29,25	41,25	55,25	71,25	89,25	109,25	131,25

варіант 11 Визначити y при x=1,3; x=5,9. Визначити x при y=25.

варіант 12 Визначити y при x=2,9; x=10,9. Визначити x при y=28.

варіант 13 Визначити y при x=3,9; x=11,1. Визначити x при y=109.

варіант 14 Визначити y при x=11,8; x=2,8. Визначити x при y=50,5.

варіант 15 Визначити y при x=6,7; x= 9,9. Визначити x при y=80,8.

варіант 16 Визначити y при x=5,3; x= 8,7. Визначити x при y=113,4.

варіант 17 Визначити у при x=2,7; x= 11,4. Визначити x при y=131,4.

варіант 18 Визначити у при x=9,9; x= 1,7. Визначити x при y=100,4.

варіант 19 Визначити у при x=11,1; x= 8,7. Визначити x при y=114.

варіант 20 Визначити у при x=5; x= 9. Визначити x при y=120.

Для заданої таблично функції (табл.4.3) знайти її значення в заданих точках:

Таблиця 4.3

x	3.2	5.2	7.2	9.2	11.2	13.2	15.2	17.2	19.2	21.2	23.2
y	5.92	3.76	2.80	2.25	1.90	1.66	1.48	1.34	1.23	1.14	1.07

варіант 21 Визначити у при x=6,2; x=14,1. Визначити x при y=3,0.

варіант 22 Визначити у при x=2,9; x=12,5. Визначити x при y=1,3.

варіант 23 Визначити у при x=3,9; x=21,1. Визначити x при y=1,06.

варіант 24 Визначити у при x=10,9; x=21,1. Визначити x при y=2,05.

варіант 25 Визначити у при x=5,7; x= 19,4. Визначити x при y=5,08.

варіант 26 Визначити у при x=12,3; x= 3,7. Визначити x при y=1,2.

варіант 27 Визначити у при x=7,3; x= 23,7. Визначити x при y=1,4.

варіант 28 Визначити у при x=9,1; x= 6,7. Визначити x при y=3,3.

варіант 29 Визначити у при x=10,1; x= 13,8. Визначити x при y=4.

варіант 30 Визначити у при x=7; x= 19. Визначити x при y=4,1.

4.4 Виконання роботи і оформлення результатів

Скласти в MS Excel горизонтальну таблицю скінченних різниць.

Обчислити в MS Excel значення функції в заданих точках.

Обчислити в MS Excel значення аргументу, при якому функція приймає вказане значення.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Відмінність інтерполяції функцій від екстраполяції.
2. Поняття скінченних різниць. Горизонтальна і діагональна таблиці кінцевих різниць.
3. При якому розташуванні вузлів інтерполяції застосовують інтерполяційні формули Ньютона?
4. Як знайти похибку інтерполяційних формул Ньютона?
5. Вигляд інтерполяційних формул Ньютона для лінійної інтерполяції?
6. Вигляд інтерполяційних формул Ньютона для квадратичної інтерполяції.
7. Зворотна інтерполяція за інтерполяційних формул Ньютона.
8. Як правильно обрати x_0 i x_n при використанні інтерполяційних формул Ньютона?
9. Визначення степеня інтерполяційних формул Ньютона(вибір).

Практичне заняття № 5

Чисельне диференціювання

Мета роботи: Дослідити процес визначення похідних від таблично заданої функції за допомогою формул чисельного диференціювання, які базуються на інтерполяційних формулах Ньютона. Набути вмінь визначення похідних від таблично заданої функції.

Завдання: Визначити значення першої і другої похідних за допомогою формул чисельного диференціювання, які базуються на інтерполяційних формулах Ньютона.

Задачі практичної роботи:

Вивчити формули для чисельного диференціювання.

Вивчити формули для чисельного диференціювання в вузлових точках.

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 5.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

5.1 Короткі теоретичні відомості

Задача чисельного диференціювання полягає у наступному. Нехай деяка функція $y = f(x)$ на деякому відрізку [a,b] задана таблично.

x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_0	y_1	y_2	…	y_n

Потрібно знайти першу і другу похідні від цієї функції:

$y' = f'(x)$ та $y'' = f''(x)$.

Ідея чисельного диференціювання полягає в побудові інтерполяційного багаточлена та його наступному диференціюванні (знаходженні похідних).

Формули для визначення похідних у першій половині таблиці мають вигляд.

Для першої похідної:

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2-6q+2}{6}\Lambda^3 y_0+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0+\right.$$
$$\left.+\frac{5q^4-40q^3+105q^2-100q+24}{120}\Lambda^5 y_0+\ldots\right].$$

Для другої похідної:

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11}{12}\Lambda^4 y_0+\frac{2q^3-12q^2+21q-10}{12}\Delta^5 y_0+\ldots\right].$$

Для наближеного обчислення похідних у вузлах інтерполяції ($x = x_0$) в якості x_0 можна взяти любе табличне значення аргументу(вузол інтерполяції). Тоді q = 0 і формули спрощуються.

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}-\ldots\right].$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+\ldots\right].$$

Формули для визначення похідних у другій половині таблиці мають вигляд.

Для першої похідної:

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1}+\frac{2q+1}{2}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{3q^2+6q+2}{6}\Lambda^3 y_{n-3}+\frac{2q^3+9q^2+11q+3}{12}\Delta^4 y_{n-4}+\right.$$
$$\left.+\frac{5q^4+40q^3+105q^2+100q+24}{120}\Lambda^5 y_{n-5}+\ldots\right]$$

Для другої похідної:

$$f''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{n-2}+(q+1)\Lambda^3 y_{n-3}+\frac{6q^3+18q^2+11}{12}\Delta^4 y_{n-4}+\frac{2q^3+12q^2+21q+10}{12}\Lambda^5 y_{n-5}+\ldots\right]$$

Для наближеного обчислення похідних у вузлах інтерполяції ($x = x_n$) в якості x_n можна взяти любе табличне значення аргументу(вузол інтерполяції). Тоді q = 0 і формули спрощуються.

$$f'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_{n-1}+\frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2}+\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3}+\frac{\Delta^4 y_{n-4}}{4}+\frac{\Delta^5 y_{n-5}}{5}+\ldots\right].$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12}\Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6}\Delta^5 y_{n-5} + \ldots\right].$$

Проте формули чисельного диференціювання зазвичай використовують для знаходження похідних не вище другого порядку, бо при зростанні порядку похідної суттєво падає точність чисельного диференціювання.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

5.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 5.1. Для заданої табличної функції

x	0,7	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7
y	1,746	2,835	2,227	4,690	5,392	5,99

Знайти значення першої та другої похідної -- y′ та y″ в заданих точках: x=1,1; x=1,3

Побудуємо таблицю скінчених різниць:

x	y(x)	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,7	1,746	1,089	-0,097	-0,032
1,1	2,835	0,992	-0,129	-0,032
1,5	3,827	0,863	-0,161	-0,034
1,9	4,69	0,702	-0,195	
2,3	5,392	0,507		
2,7	5,899			

Оскільки скінчені різниці 3-го порядку приблизно рівні між собою, то ними і обмежуємося.

Знаходимо значення першої та другої похідних в точках: 1,1; 1,3.

На основі першої інтерполяційної формули Ньютона маємо формули для розрахунку у вузловій точці x=1,1.

$$y'(1,1)=1/h(\Delta y_0 - 1/2\Delta^2 y_0 + 1/3\Delta^3 y_0),$$

$$y''(1.1)= 1/h^2(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0).$$

Виконаємо розрахунки в точці $x=1,1$.

$$y'(1,1)= 1/0,4*(0,992+1/2*0,129-1/3*0,032)=2,614$$

$$y''(1.1)= 1/(0,4)^2(-0,129+0,032)= -0,606$$

Точка x=1,3 не є вузловою, і формули для знаходження похідних матимуть вигляд:

$$f'(x)= 1/h[\Delta y_0 +(2q-1)/2*\Delta^2 y_0 + (3q-6q+2)/6*\Delta^3 y_0 +\ldots]$$

$$f''(x)=1/h^2[(\Delta^2 y_0 + (q-1)\,\Delta^3 y_0 + \ldots]$$

Знайдемо q:

$$q=(x-x_0)/h$$

$$q= (1,3-1,1)/0,4=0,2/0,4=1/2$$

Знайдемо похідні в точці x=1,3:

$$f'(1,3)=1/0,4(0,992+(2*0,5-1)/2*(-0,129)+(3*0,25-6*0,5+2)/6*(-0,032)= 2,48$$

$$f''(1,3)=(1/0,4)^2((-0,129)+(0,5-1)*(-0,032))= -0,706$$

Приклад розрахунків в MS Excel

таблиця скінчених різниць

x	y(x)	Δyi	Δ2yi	Δ3yi
0.7	1.746	1.089	-0.097	-0.032
1.1	2.835	0.992	-0.129	-0.032
1.5	3.827	0.863	-0.161	-0.034
1.9	4.69	0.702	-0.195	
2.3	5.392	0.507		
2.7	5.899			

розрахунки

y'(1,1)=1/0,4(0,992+1/2*0,129-1/3*0,032)=2.61458≈2,614*
y''(1,1)=1/(0,4)^2(-0,129+0,032)=-0.6063≈-0,606
q=(1,3-1,1)/0,4=0,5
*f'(1,3)=1/0,4(0,992+(2*0,5-1)/2*(-0,129)+(3*0,25-6*0,5+2)/6*(-0,032) =*
=2.48333≈ 2,48
f''(1,3)=(1/0,4)^2((-0,129)+(0,5-1)(-0,032))=-0.7063≈ -0,706*

5.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 5

Завдання: Для функції *y=f(x)* (таблиця 5.1), знайти значення першої и другої похідних в заданих у таблиці 5.2 значеннях аргументу.

Таблиця 5.1

№1		№2		№3		№4		№5	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1,6	1,754	2,5	3,291	1,0	1,256	0,4	0,398	1,2	0,783
1,7	1,868	2,6	3,553	1,1	1,316	0,6	1,483	1,4	1,697
1,8	1,993	2,7	3,845	1,2	1,384	1,8	2,679	1,6	2,794
1,9	2,131	2,8	4,161	1,3	1,459	1,0	3,996	1,8	3,063
2,0	2,884	2,9	4,503	1,4	1,543	1,2	5,443	2,0	4,609
2,1	2,284	3	4,875	1,5	1,637	1,4	7,035	2,2	5,365

№6		№7		№8		№9		№10	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2.4	2.396	3.6	3.092	0.8	2.743	3.0	2.743	1.6	2.638
2.6	2.652	3.8	3.201	1.2	2.804	3.2	2.804	2.0	3.501
2.8	2.815	4.0	3.377	1.6	2.855	3.4	2.855	2.4	4.203
3.0	2.913	4.2	3.645	2.0	4.681	3.6	2.922	2.8	4.710
3.2	2.974	4.4	4.029	2.4	5.383	3.8	3.031	3.2	4.988
3.4	3.025	4.6	4.553	2.8	5.890	4.0	3.207	3.6	5.011

№11		№12		№13		№14		№15	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1.7	1.753	1.8	2.574	1.1	2.437	0.8	0.571	4.5	2.231
1.9	2.017	2.0	3.671	1.3	2.579	1.0	1.887	5.0	2.671
2.1	2.335	2.2	4.970	1.5	2.758	1.2	3.335	5..5	3.052
2.3	2.719	2.4	5.486	1.7	2.975	1.4	4.926	6.0	3.891
2.5	3.178	2.6	6.241	1.9	3.239	1.6	6.672	6.5	5.321
2.7	3.731	2.8	7.258	2.1	3.557	1.8	8.586	7.0	6.692

№16		№17		№18		№19		№20	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2.3	1.423	1.5	2.111	0.7	3.968	0.5	2.645	0.2	1.547
2.5	1.679	1.7	2.223	1.1	5.057	0.9	3.734	0.6	2.636
2.7	1.842	1.9	2.396	1.5	6.049	1.3	4.726	1.0	3.628
2.9	1.945	2.1	2.664	1.9	6.912	1.7	5.589	1.4	4.491
3.1	2.003	2.3	3.048	2.3	7.614	2.1	6.291	1.8	5.193
3.3	2.052	2.5	3.572	2.7	8.121	2.5	6.798	2.2	5.702

№21		№22		№23		№24		№25	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
3.6	3.122	0.4	2.125	1.3	1.770	1.6	0.511	3.1	2.338
3.8	3.231	0.7	2.381	1.6	2.061	1.8	0.751	3.3	2.668
4.0	3.407	1.0	2.544	1.9	2.439	2.0	1.040	3.5	3.029
4.2	3.675	1.3	2.642	2.2	2.941	2.2	1.389	3.7	3.425
4.4	4.059	1.6	2.703	2.5	3.501	2.4	1.809	3.9	3.857
4.6	4.582	1.9	2.754	2.8	4.468	2.6	2.312	4.1	4.331

№26		№27		№28		№29		№30	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
2.1	1.280	0.3	1.566	0.6	0.585	0.5	0.847	7.1	1.376
2.3	1.664	0.5	2.651	0.9	1.781	0.8	1.191	7.3	1.519
2.5	2.123	0.7	3.847	1.2	3.098	1.1	1.646	7.5	1.697
2.7	2.676	0.9	5.154	1.5	4.546	1.4	2.249	7.7	1.914
2.9	3.337	1.1	6.612	1.8	6.137	1.7	3.042	7.9	2.178
3.1	3.915	1.3	8.203	2.1	7.883	2.0	4.081	8.1	2.496

Таблиця 5.2

Номер завдання	*Значення x*				*Номер завдання*	*Значення x*			
1	1,6	1,75	2,0	2,38	16	2,45	2,7	3,24	3,3
2	2,5	2,68	2,9	2,94	17	1,63	1,9	2,46	2,5
3	1,1	1,24	1,4	1,46	18	0,95	1,5	2,13	2,7
4	0,6	0,72	1,0	1,28	19	0,73	0,9	1,95	2,1
5	1,2	1,35	1,8	2,15	20	0,45	0,6	1,72	1,8
6	2,6	2,95	3,2	3,34	21	3,75	3,8	4,35	4,6
7	9,7	3,89	4,4	4,53	22	0,56	0,7	1,52	1,9
8	1,1	1,54	2,6	2,75	23	1,45	1,6	2,43	2,8
9	3,2	3,38	3,8	3,91	24	1,78	1,8	2,39	2,6
10	1,6	2,34	3,4	3,57	25	3,25	3,3	3,84	4,1
11	1,7	1,83	2,4	2,65	26	2,16	2,3	2,86	3,1
12	1,9	2,14	2,6	2,78	27	0,45	0,5	0,98	1,3
13	1,1	1,46	1,9	2,19	28	0,73	0,9	1,75	2,1
14	0,8	1,15	1,4	1,76	29	0,65	0,8	1,55	1,7
15	4,5	5,28	6,5	3,83	30	7,25	7,3	7,85	8,1

5.4 Виконання роботи і оформлення результатів

Скласти в MS Excel горизонтальну таблицю скінченних різниць.

Обчислити в MS Excel значення першої і другої похідних від табличної функції в заданих точках.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Як отримані формули для обчислення похідних від таблично заданої функції?
2. Як правильно обрати x_0 i x_n при використанні формули для обчислення похідних?
3. Чому формули для обчислення похідних спрощуються при розрахунках у вузлових точках?

Практичне заняття № 6

Вибір виду апроксимуючої залежності

Мета роботи: Дослідити процес визначення виду апроксимуючої залежності. Набути вмінь визначати вид апроксимуючої залежності, яка описує надані експериментальні дані з мінімальною похибкою, за допомогою аналітичного методу.

Завдання: Визначити вид апроксимуючої залежності, яка описує надані експериментальні дані з мінімальною похибкою, за допомогою аналітичного методу.

Задачі практичної роботи:

Вивчити аналітичний метод визначення виду апроксимуючої.

Розглянути метод вирівнювання функцій (зведення нелінійної залежності до лінійної)залежності.

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 6.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

6.1 Короткі теоретичні відомості

Аналітичний спосіб визначення виду апроксимуючої залежності

Цей спосіб базується на використанні для вибору загального виду емпіричної формули деяких аналітичних критеріїв.

Він дозволяє обрати для апроксимації одну з ряду функцій, з якими працює метод. Недоліком методу є те, що перелік функцій досить обмежений.

Розглянемо вибір виду апроксимуючої функції з двома параметрами.

Емпіричні формули з двома параметрами

При аналізі й описуванні закономірностей хімічних і фізико-хімічних процесів і явищ емпіричну формулу найчастіше обирають серед таких функцій:

I) $y = a \cdot x + b$ - лінійна;

II) $y = a \cdot b^x$ - показникова;

III) $y = \frac{1}{a \cdot x + b}$ - дробово-раціональна;

IV) $y = a \cdot ln(x) + b$ - логарифмічна;

V) $y = a \cdot x^b$ - степенева, причому при b>0 – залежність параболічна, а при b<0 - гіперболічна;

VI) $y = a + \frac{b}{x}$ - гіперболічна;

VII) $y = \frac{x}{a \cdot x + b}$ - дробово-раціональна.

З метою визначення функції, що найкраще описує дослідні дані, необхідно виконати наступні розрахунки.

1. За даними таблиці 6.1 знайти:

Таблиця 6.1

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

$x_{ар} = \frac{x_1 + x_n}{2}$ (середнє арифметичне значень x_1 та x_n); $y_{ар} = \frac{y_1 + y_n}{2}$;

$x_{геом} = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$ (середнє геометричне); $y_{геом} = \sqrt{y_1 \cdot y_n}$;

$x_{гарм} = \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n}$ (середнє гармонічне); $y_{гарм} = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n}$.

2. За даними табл. 6.1, користуючись, наприклад, інтерполяційними формулами (або за наближено побудованому графіку шуканої функції, навколо якого групуються дослідні точки (x_i, y_i)), знайти значення $y^*_{ар}$, $y^*_{геом}$, $y^*_{гарм}$, що відповідають знайденим у попередньому пункті значенням $x^*_{ар}$, $x^*_{геом}$, $x^*_{гарм}$. Причому, якщо, наприклад, $x^*_{ар}$ (або $x^*_{геом}$, $x^*_{гарм}$), співпадає з табличним значенням $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, то відповідне значення $y^*_{ар}$ (або

$y^*_{геом}$, $y^*_{гарм}$) буде теж дорівнювати табличному значенню y_i; в іншому випадку $y^*_{ар}$ можна визначити, користуючись формулою лінійної інтерполяції

$$y^*_{ар} = y_i + \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x_{ар} - x_i), \qquad (6.1)$$

де x_i, x_{i+1} – значення з табл. 6.1, між якими знаходиться $x^*_{ар}$ $(x_i < x_{ар} < x_{i+1})$; $y_i < y^*_{ар} < y_{i+1} (i = 1, 2, \dots, n-1)$.

3. Знайти величини:

$\varepsilon_1 = |y^*_{ар} - y_{ар}|$ $\quad$ $\varepsilon_4 = |y^*_{геом} - y_{ар}|$

$\varepsilon_2 = |y^*_{ар} - y_{геом}|$ $\quad$ $\varepsilon_5 = |y^*_{геом} - y_{геом}|$

$\varepsilon_3 = |y^*_{ар} - y_{гарм}|$ $\quad$ $\varepsilon_6 = |y^*_{гарм} - y_{ар}|$ $\quad$ $\varepsilon_7 = |y^*_{гарм} - y_{гарм}|$

і серед них визначити мінімальне значення

$\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_7\}$.

4. Обрати емпіричну формулу серед функцій I÷VII. Шукана емпірична формула матиме вигляд:

I) $y = a \cdot x + b$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_1$;

II) $y = a \cdot b^x$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_2$;

III) $y = \frac{1}{a \cdot x + b}$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_3$;

IV) $y = a \cdot ln(x) + b$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_4$;

V) $y = a \cdot x^b$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_5$;

VI) $y = a + \frac{b}{x}$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_6$;

VII) $y = \frac{x}{a \cdot x + b}$ - якщо $\varepsilon = \varepsilon_7$.

Слід враховувати, що I÷VII монотонні, і тому відповідні їм дослідні дані (x_i, y_i)при $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ повинні мати постійний знак приросту $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $i = 1, 2, \dots, n-1$). В іншому випадку залежності I÷VII не рекомендовані.

Такий спосіб вибору емпіричної формули є грубо орієнтовним, оскільки він не враховує поведінку всіх проміжних даних (x_i, y_i). Також може статися, що змінні x і y підпорядковуються іншій закономірності, і тоді вид емпіричної формули буде відрізнятися від функцій I÷VII.

Примітка. При використанні цього методу вважатимемо, що початкові дані x_i, y_i $(i = 1, 2, \dots, n;\ n \geq 3)$ додатні і $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Якщо ж всі $x_i < 0$ (або всі $y_i < 0$), то достатньо розглянути таблицю значень $(-x_i, y_i)$(або відповідно $(x_i, -y_i)$. Аналогічно при $x_i < 0$ та $y_i < 0$ достатньо побудувати емпіричну формулу для таблиці $(-x_i, -y_i)$. У випадку, коли деякі із значень x_i, y_i додатні, а деякі - від'ємні, завжди можливо виконати заміну змінних, підібравши такі числа $M > 0$ і $N > 0$, при яких $\xi_i = M + x_i > 0$, $\eta_i = N + y_i > 0$. Тоді задача зводиться до знаходження емпіричної формули для додатних значень ξ_i і η_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Зведення нелінійних залежностей до задачі лінійної апроксимації (метод вирівнювання)

1. Нехай залежність між x та y досить добре описується показниковою функцією:

$$\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x}. \qquad (6.2)$$

Необхідно за МНК визначити коефіцієнти цієї функції a та b.

Використовуємо метод вирівнювання, який після переходу до іншої системи координат дозволить працювати із заданою залежністю як з лінійною.

Прологарифмуємо залежність (6.2) і отримаємо:

$$lg(\hat{y}) = lg(a) + b \cdot x \cdot lg(e). \qquad (6.3)$$

Позначимо:

$$P = lg(\hat{y}); \qquad C = lg(a);\ D = b \cdot lg(e)$$

і отримаємо рівняння:

$$P = C + D \cdot x. \qquad (6.4)$$

Це рівняння є лінійним в новій системі координат P та x.

Для цього рівняння можна застосовувати метод найменших квадратів - ***лінійну апроксимацію*** і знайти коефіцієнти C і D.

Після того як знайшли C і D , знаходимо a та b з формул

$$C = lg(a); \qquad D = b \cdot lg(e).$$

Ці коефіцієнти і підставимо в апроксимуючу залежність $\hat{y} = a \cdot e^{b \cdot x}$.

2. Для залежностей виду $\hat{y} = a \cdot b^x$:

$$lg(\hat{y}) = lg(a) + x \cdot lg(b)$$

$$P = C + D \cdot x$$

3. Для дробово-раціональних функцій виду $\hat{y} = \frac{1}{a \cdot x + b}$

знайдемо обернену залежність: $\frac{1}{\hat{y}} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{b}$.

Прийнявши $\mathrm{W} = \frac{1}{\hat{y}}$, отримаємо $\mathrm{W} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{b}$.

4. Для логарифмічної залежності виду $\hat{y} = a \cdot ln(x) + b$:

прийнявши $Q = ln(x)$, отримаємо $\hat{y} = a \cdot Q + b$.

5. Для степеневої залежності $\hat{y} = a \cdot x^b$, де $a, b > 0$:

Прологарифмувавши залежність, отримаємо: $lg(\hat{y}) = lg(a) + b \cdot lg(x)$.

Позначивши: $z = lg(y), \quad A = lg(a), \quad \varphi = lg(x)$,

отримаємо: $z = A + b \cdot \varphi$.

6. Для функції виду $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$:

позначивши $q = \frac{1}{x}$, отримаємо: $\hat{y} = a + b \cdot q$.

7. Для дробово-раціональних функцій виду $\hat{y} = \frac{x}{a \cdot x + b}$

знайдемо обернену залежність: $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$.

Уведемо позначення: $z = \frac{1}{\hat{y}}$, $q = \frac{1}{x}$.

Отримаємо: $z = a + b \cdot q$.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

6.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 6.1

Користуючись аналітичним способом, знайти загальний вигляд емпіричної формули, який відповідає табл. 6.2; визначити параметри за методом найменших квадратів; оцінити точність отриманої емпіричної формули.

Таблиця 6.2

x	3,304	1,457	0,903	0,382	0,245	0,167	0,119
y	0,5	1,2	2,0	5,0	8,0	12,0	17,0

Рішення. Обирати емпіричну формулу будемо серед залежностей II-VII.

За даними табл. 6.2 знайдемо:

$$x_{ар} = \frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{3{,}304 + 0{,}119}{2} = 1{,}712$$

$$x_{геом} = \sqrt{x_1 \times x_n} = \sqrt{3{,}304 \times 0{,}119} = 0{,}627$$

$$x_{гарм} = \frac{2x_1 x_n}{x_1 + x_n} = \frac{2 \times 3{,}304 \times 0{,}119}{3{,}304 + 0{,}119} = 0{,}230$$

$$y_{ар} = \frac{y_1 + y_n}{2} = \frac{0{,}5 + 17{,}0}{2} = 8{,}75$$

$$y_{геом} = \sqrt{y_1 \times y_n} = \sqrt{0{,}5 \times 17} = 2{,}92$$

$$y = \frac{2y_1 y_n}{y_1 + y_n} = \frac{2 \times 0{,}5 \times 17}{0{,}5 + 17} = 0{,}97$$

Користуючись інтерполяційною формулою (6.2), знайдемо:

$$y^*_{ар} = 0{,}5 + \frac{1{,}2 - 0{,}5}{1{,}457 - 3{,}304}(1{,}712 - 3{,}304) = 1{,}103$$

$$y^*_{геом} = 2 + \frac{5 - 2}{0{,}382 - 0{,}903}(0{,}627 - 0{,}903) = 3{,}589$$

$$y^*_{гарм} = 8 + \frac{12 - 8}{0{,}167 - 0{,}245}(0{,}230 - 0{,}245) = 8{,}769$$

Знайдемо величини:

$$e_2 = \left| y^*_{ар} - y_{геом} \right| = \left| 1{,}103 - 2{,}92 \right| = 1{,}817$$

$$e_3 = \left| y^*_{ар} - y_{геом} \right| = \left| 1{,}103 - 0{,}97 \right| = 0{,}133$$

$$e_4 = \left| y^*_{геом} - y_{ар} \right| = \left| 3{,}589 - 8{,}75 \right| = 5{,}161$$

$$e_5 = \left| y^*_{геом} - y_{геом} \right| = \left| 3{,}589 - 2{,}92 \right| = 0{,}669$$

$$e_6 = \left| y^*_{гарм} - y_{ар} \right| = \left| 8{,}769 - 8{,}75 \right| = 0{,}019$$

$$e_7 = \left| y^*_{гарм} - y_{гарм} \right| = \left| 8{,}769 - 0{,}97 \right| = 7{,}799$$

Так як $e = \min\{e_2, e_3, ..., e_7\} = e_6 = 0{,}019$, то шукана емпірична формула матиме вигляд $y = a + \frac{b}{x}$.

Ввівши нові змінні $X = \frac{1}{x}, Y = y$, отримаємо лінійну залежність

$Y = a + b \times X$.

Відповідні дані приведено в табл. 6.3

Таблиця 6.3

X	0,303	0,686	1,107	2,618	4,082	5,988	8,403
Y	0,5	1,2	2,0	5,0	8,0	12,0	17,0

Побудувавши в площині ХОУ точки (X_i, $У_i$), переконаємось, що вони лежать майже на прямій (рис. 6.1). Отже, вибір емпіричної формули зроблено вірно.

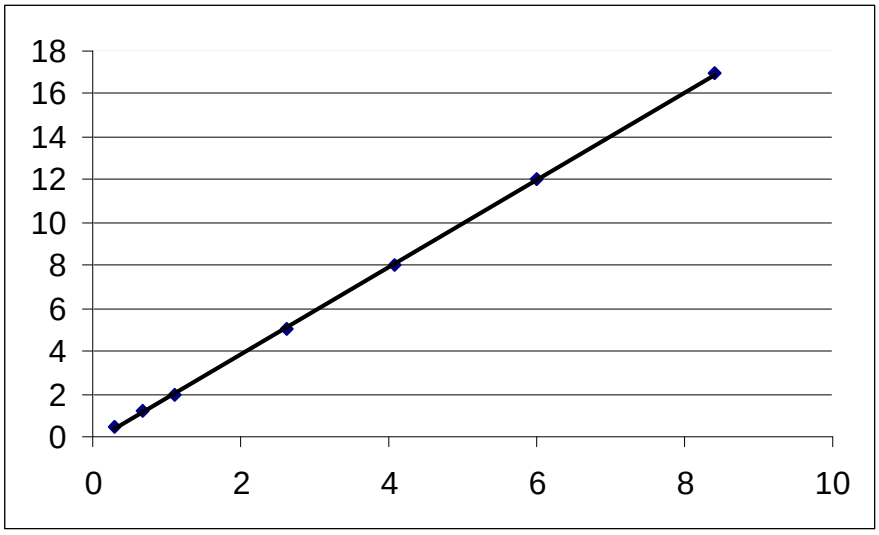

Рис. 6.1. Лінійна кореляційна залежність

Параметри a і b визначимо методом найменших квадратів. Для визначення коефіцієнтів нормальної системи для лінійної апроксимації складаємо табл.6.3.

Тепер запишемо нормальну систему рівнянь:

Таблиця 6.3.

i	X_i	$У_i$	X_i^2	X_iY_i
1	0,303	0,5	0,092	0,152
2	0,686	1,2	0,471	0,823
3	1,107	2,0	1,225	2,214
4	2,618	5,0	6,854	13,090
5	4,082	8,0	16,883	32,656
6	5,988	12,0	35,856	71,856
7	8,403	17,0	70,610	142,851
∑	23,187	45,7	131,771	263,642

$$\left.\begin{array}{l} 131{,}771\times b + 23{,}187\times a = 263{,}642 \\ 13{,}187\times b + 7\times a = 45{,}7 \end{array}\right\}$$

Знайдемо a і b за формулами Крамера:

a=0,001; b=1,97.

Відповідно, шукана емпірична формула матиме вигляд

$$y = 0{,}001 + \frac{1{,}97}{x} \qquad (6.3)$$

Порівняння значень $\bar{y}$, отриманих за формулою з вихідними даними y, показано в табл.6.4.

Таблиця 6.4

x	y	$\bar{y}$	$e = y - \bar{y}$	e^2
0,304	0,5	0,6	-0,1	0,01
1,457	1,2	1,3	-0,1	0,01
0,903	2,0	2,2	-0,2	0,04
0,382	5,0	5,2	-0,2	0,04
0,245	8,0	8,0	0	0
0,167	12,0	11,8	0,2	0,04
0,119	17,0	16,6	0,4	0,16
Сума				0,3

Середньоквадратичну похибку апроксимації визначаємо за формулою:

$$s = \sqrt{\frac{\sum}{n-1}}$$

Для розглядуваного прикладу отримаємо:

$$d = \sqrt{\frac{0,3}{6}} \approx 0,02$$

Така похибка говорить про те, що знайдена емпірична формула достатньо добре апроксимує представлені в табл. 6.2 експериментальні дані.

6.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 1

Співпадають з варіантами завдань до РГР.

6.4 Виконання роботи і оформлення результатів

Для заданої табличної функції, отриманої експериментально *(варіант виданий викладачем)*, вирішити задачу апроксимації:

1. Отримати апроксимуючу функцію для чого:
   1.1. Визначити загальний вид апроксимуючої функції:
   - побудувати точковий графік заданої функції;
   - скориставшись методикою, викладеною в методичних вказівках *(аналітичний спосіб)* визначити: параметри необхідні для розрахунків $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_7$ і знайти ці величини;
   - знайти мінімальне значення величини ε_i і виконати вибір апроксимуючої залежності з запропонованих функцій I…VII;

   1.2. Виконати вирівнювання отриманої апроксимуючої залежності, якщо це потрібно;

   1.3. Визначити параметри апроксимуючої залежності, скориставшись методом найменших квадратів(МНК).

   Продемонструвати розрахунки викладачу.

   ДОДАТКОВЕ ЗАВДАННЯ (додаткові бали)

   1.4. Розрахувати за отриманою апроксимуючою формулою значення функції у вузлових точках;

   1.5. Оцінити похибку апроксимації:
   - обчислити середнєквадратичну похибку апроксимації;

- побудувати графік отриманої апроксимуючої функції, сумістивши його на одному малюнку з точковим графіком заданої функції;

- зробити висновки про точність опису експериментальних даних знайденою апроксимуючою залежністю.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Метод найменших квадратів?
2. Алгоритм аналітичного способу отримання виду апроксимуючої залежності.
3. Середнєквадратична похибка апроксимації?

Практичне заняття № 7

Методи систематизації статистичного матеріалу

Мета роботи: Дослідити методи обробки статистичного матеріалу. Набути вмінь аналізу результатів.

Завдання: Обробити надані результати експериментальних досліджень:

побудувати варіаційний ряд;

побудувати інтервальний статистичний розподіл частот і відносних частот;

побудувати гістограми частот і відносних частот;

визначити числові характеристики для заданого статистичного розподілу.

Задачі практичної роботи:

Вивчити статистичний розподіл і форми його подання.

Вивчити числові характеристики статистичного розподілу.

Розглянути графічне представлення статистичного розподілу і його інтерпретацію.

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 7.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

7.1 Короткі теоретичні відомості

Генеральна сукупність та вибірка

Нехай проводиться випадковий експеримент з метою дослідження певної випадкової ознаки (величини) ***X***, що характерна для великої кількості однотипних об'єктів. Множину цих об'єктів з досліджуваною ознакою ***X*** (або сукупність значень ознаки ***X*** всіх об'єктів даного типу) називають генеральною сукупністю (ГС). Число об'єктів ***N*** в ГС називається об'ємом ГС. Вибірковою сукупністю або вибіркою об'єму ***n*** (***n***<***N***) називається сукупність n випадково вибраних об'єктів з ГС для дослідження ознаки ***X*** (тобто сукупність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значень ознаки ***X*** випадково вибраних ***n*** об'єктів з ГС).

Сукупність значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, прийнятих випадковою величиною $\boldsymbol{X}$ в **n** дослідах, називають простою статистичною сукупністю або простим статистичним рядом:

i	1	2	3	…	n
x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_n

.

Статистичним розподілом частот (відносних частот) називають перелік усіх можливих значень випадкової величини $\boldsymbol{X}$, тобто (x_1, x_2, …,$x_к$), і відповідних їм частот $\boldsymbol{n_i}$ ($n_1+n_2+\ldots+n_k=n$) або відносних частот $\boldsymbol{W_i}$ ($W_i = n_i/n$). Вказаний розподіл представляють зазвичай у вигляді таблиці:

Таблиця 7.1. Статистичний розподіл частот

x_i	x_1	x_2	…	$x_к$
n_i	n_1	n_2	…	$n_к$

Таблиця 7.2. Статистичний розподіл відносних частот

x_i	x_1	x_2	…	$x_к$
W_i	W_1	W_2	…	$W_к$

$\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Значення випадкової величини записують в порядку їх зростання. Тоді x_1, x_2, …, $x_к$ називають варіантами, а послідовність варіант, записаних у зростаючому порядку – **варіаційним рядом**.

Графічним зображенням статистичного розподілу частот є полігон частот, яким називають ламану, що складається з відрізків, які з'єднують точки з координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), … , ($x_к$, $n_к$).

Полігоном відносних частот називають ламану, яка з'єднує точки з координатами (x_1, W_1), (x_2, W_2), … , ($x_к$, $W_к$).

Полігон частот та полігон відносних частот зображено на рис. 7.1 та 7.2 відповідно.

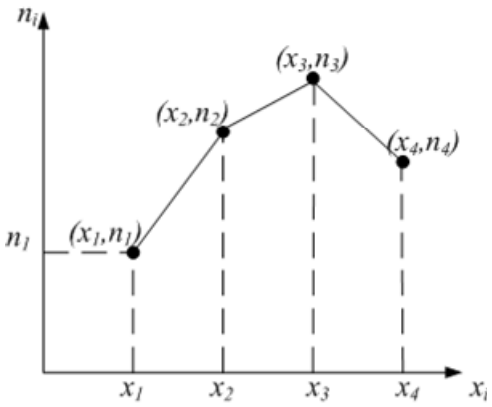

Рис. 7.1. Полігон частот

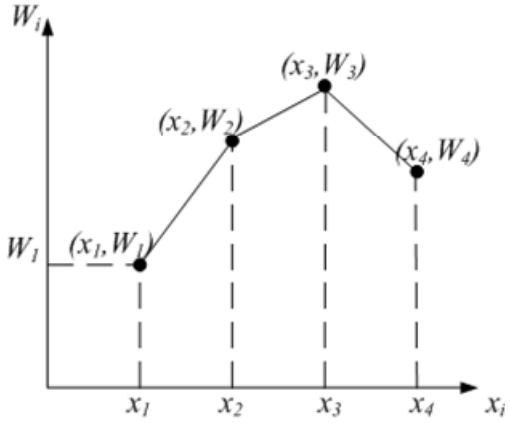

Рис. 7.2. Полігон відносних частот

У тих випадках, коли кількість експериментальних даних велика (об'єм вибірки більше за 30), всю сукупність значень розділяють на інтервали і визначають частоти попадання випадкової величини в інтервал.

Інтервал $[x_1, x_n]$ в залежності від об'єму вибірки n розбивають на k інтервалів, де значення k приймають у межах від 8 до 20, або обчислюють за формулою: $k = 1 + 3{,}2 \lg(n)$.

Величину кроку розбиття h у випадку рівнокрокового інтервального ряду знаходять за формулою

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \cdot \lg(n)}. \qquad (7.1)$$

Нижню межу x інтервального ряду обирають так, щоб варіанти вибірки групувалися поблизу середніх значень інтервалів розбиття. Якщо у вибірці зустрічаються m значень, що дорівнюють $x_i (i = \overline{2,k})$, то у випадку парного m половину значень відносять до інтервалу I_{i-1}, а половину до I_i. Якщо m непарне, то $\frac{m-1}{2}$ значень відносять до I_{i-1}, а $\frac{m+1}{2}$ – до I_i.

Далі визначаються частоти ni – кількість елементів вибірки, що

попали в *i*-й інтервал.

Статистичний розподіл, який задано у вигляді послідовності інтервалів і відповідних їм частот (відносних частот), називають інтервальним статистичним розподілом частот (відносних частот). В якості частоти, відповідної даному інтервалу, приймають суму частот тих варіант, що потрапили в цей інтервал.

Інтервальний статистичний розподіл частот (відносних частот) також представляють у вигляді таблиці:

Таблиця 7.3. Інтервальний статистичний розподіл частот

I_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_к - x_{к+1}$
m_i	m_1	m_2	…	$m_к$

або

Таблиця 7.4. Інтервальний статистичний розподіл відносних частот

I_i	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_к - x_{к+1}$
W_i	W_1	W_2	…	$W_к$

де m_i– частоти; W_i– відносні частоти; k – кількість інтервалів.

Графічним зображенням інтервального статистичного розподілу є гістограми. Гістограмою частот називають фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню m_i/h m_i/h(щільності частоти); m_i- сума частот варіант, що потрапили в *i*-й інтервал.

Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки $S = \sum m_i = n$.

Якщо по осі ординат відкласти W_i/h $\frac{w_i}{h}$ (щільність відносної частоти), то отримаємо гістограму відносних частот. Площа гістограми відносних частот рівна сумі всіх відносних частот, тобто 1.

Числові характеристики статистичного розподілу

Часто згрупований статистичний ряд містить середини інтервалів і відповідні частоти (відносні частоти).

Нехай для вибірки об’ємом **n** побудовано статистичний розподіл частот:

x_i	x_1	x_2	…	$x_к$
n_i	n_1	n_2	…	$n_к$

Вибірковою середньою $\bar{x}_B$ називають середню зважену значень випадкової величини з вагами, що дорівнюють відповідним частотам:

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \mathbf{K} + x_k \cdot n_k}{n},$$

або

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n}, \tag{7.2}$$

де $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$.

Вибіркова дисперсія характеризує розсіювання значень x_i (x_1, x_2,…, $x_к$), отриманих у дослідах, навколо вибіркової середньої $\bar{x}_B$. Вона дорівнює середній зваженій квадратів відхилень значень x_i від їх середнього значення $\bar{x}_B$ з вагами, що дорівнюють відповідним частотам:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}. \tag{7.3}$$

На практиці досить часто для обчислення D_B застосовують формулу:

, (7.4)

де $\bar{x}_B$ - вибіркова середня, $(\overline{x_B})^2$ - квадрат вибіркової середньої, $\overline{x_B^2}$- середнє квадратів значень x_i:

$$\overline{x_B^2} = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \cdots + x_k^2 \cdot n_k}{n} \tag{7.5}$$

.

Вибіркове середнє квадратичне відхилення - квадратний корінь з вибіркової дисперсії:

$$s_B = \sqrt{D_B}. \tag{7.6}$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення є також характеристикою розсіювання, але ця величина має розмірність випадкової величини.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

7.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 7.1.Побудувати гістограму частот і відносних частот та визначити їх площу для заданого інтервального статистичного розподілу:

I_i	10-20	20-30	30-40
m_i	2	5	3

Розв'язок. Величина кроку для даного інтервального статистичного розподілу $h=10$; $n = \sum m_i = 10$.

Розрахунки, необхідні для побудови гістограми частот і відносних частот представимо у таблиці:

I	10-20	20-30	30-40
m_i	2	5	3
m_i/h	0,2	0,5	0,3
$W_i = n_i/n$	0,2	0,5	0,3
W_i/h	0,02	0,05	0,03

m_i – частоти; W_i - відносні частоти.

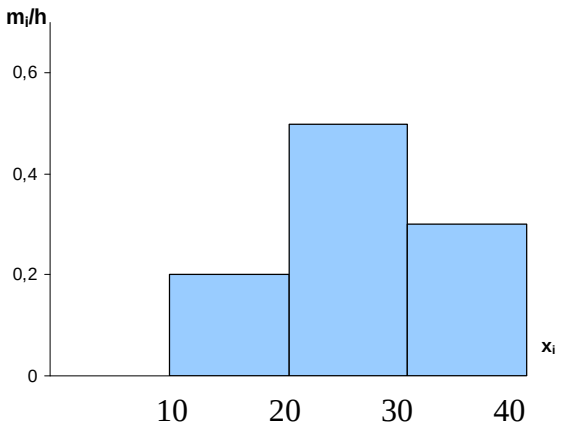

Рис. 7.3. Гістограма частот

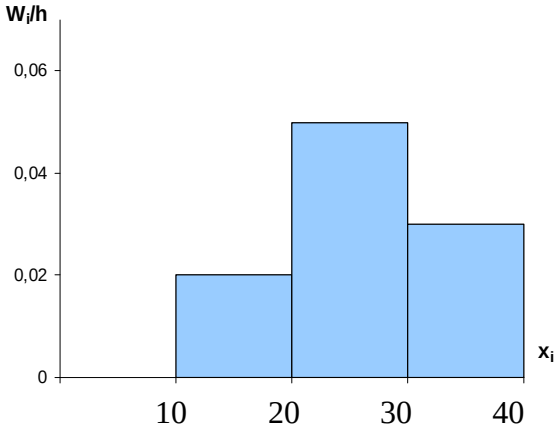

Рис. 7.4. Гістограма відносних частот

Площа гістограми частот дорівнює об'єму вибірки: $n = 10$, площа гістограми відносних частот дорівнює сумі відносних частот: $\sum w_i = 1$.

Приклад 7.2.

Для заданої вибірки обчислити основні числові характеристики статистичного розподілу

x_i	1	4	8
n_i	5	3	2

.

Розв'язок. $n=n_1+n_2+n_3=5+3+2=10$.

Обчислимо вибіркову середню за формулою (7.2):

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + x_3 \cdot n_3}{n} = \frac{1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2}{10} = 3{,}3.$$

Дисперсію розрахуємо за формулою (7.4), для чого обчислимо $\overline{x_B^2}$ - середнє квадратів значень x_i:

$$\overline{x_B^2} = \frac{x_1^2 \cdot n_1 + x_2^2 \cdot n_2 + \cdots + x_k^2 \cdot n_k}{n} = \frac{1^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 2}{10} = \frac{5 + 48 + 128}{10} = 18{,}1.$$

Тоді

$$D_B = 18{,}1 - (3{,}3)^2 = 7{,}21.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення σ_B за формулою (7.6):

$$s_B = \sqrt{7{,}21} = 2{,}69.$$

Приклад 7.3.

Вартість книги по математичній статистиці в тридцяти різних інтернет-магазинах становила (у гривнях):

200, 198, 201, 203, 203, 204, 196, 200, 203, 198, 199, 197, 197, 199, 199, 196, 199, 200, 201, 200, 200, 200, 203, 200, 200, 199, 204, 202, 205, 199.

Побудувати:

простий статистичний ряд;

варіаційний ряд;

інтервальний статистичний розподіл частот (кількість інтервалів – 6);

інтервальний статистичний розподіл відносних частот (кількість інтервалів – 6).

В MS Excel побудувати гістограми частот і відносних частот, а також знайти вибіркове середнє.

Розв'язок.

Об'єм вибірки – кількість її елементів n = 30.

Запишемо надані дані у вигляді простого статистичного ряду:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	200	198	201	203	203	204	196	200	203	198	199	197	197	199	199

i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x	196	199	200	201	200	200	200	203	200	200	199	204	202	205	199

Побудуємо варіаційний ряд:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	196	196	197	197	198	198	199	199	199	199	199	199	200	200	200

i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x	200	200	200	200	200	201	201	202	203	203	203	203	204	204	205

Мінімальне значення ряду становить – 196, а максимальне – 205.

– різниця між максимальним та мінімальним значенням варіант: $R = x_{\max} - x_{\min}$, становить – R = 205 – 196 = 9.

Довжина інтервалу $h = R / k$, де R – розмах варіювання; k - кількість інтервалів, становить – h = 9/6 = 1,5.

Мінімальне значення ряду 196, максимальне – 205, розмах вибірки, довжина інтервалу – w = 9/6 = 1,5.

Для побудови інтервального статистичного розподілу частот (кількість інтервалів – 6) прийняли для нижньої границі мінімальне значення вибірки – 196, а при підрахунках частот елемент з верхньою межею відносили для даного інтервалу.

В результаті отримали інтервальний статистичний розподіл частот:

I_i	*196 – 197,5*	*197,5 – 199*	*199 – 200,5*	*200,5 – 202*	*202 – 203,5*	*203,5 – 205*
m_i	*4*	*8*	*8*	*3*	*4*	*3*

А з урахуванням $W_i = n_i/n$ (n = 30) і інтервальний статистичний розподіл відносних частот

I_i	*196 – 197,5*	*197,5 – 199*	*199 – 200,5*	*200,5 – 202*	*202 – 203,5*	*203,5 – 205*
W_i	*0,133*	*0,267*	*0,267*	*0,100*	*0,133*	*0,100*

Виконаємо розрахунки, необхідні для побудови гістограми частот і відносних частот представимо їх у таблиці:

I_i	*196 – 197,5*	*197,5 – 199*	*199 – 200,5*	*200,5 – 202*	*202 – 203,5*	*203,5 – 205*
m_i	*4*	*8*	*8*	*3*	*4*	*3*
m_i/h	*2,67*	*5,33*	*5,33*	*2*	*2,67*	*2*
W_i	*0,133*	*0,267*	*0,267*	*0,100*	*0,133*	*0,100*
W_i/h	*0,089*	*0,178*	*0,178*	*0,067*	*0,089*	*0,067*

Гістограма частот побудована за даними наведеної таблиці представлена на рис. 7.5.

А гістограма відносних частот представлена на рис. 7.6.

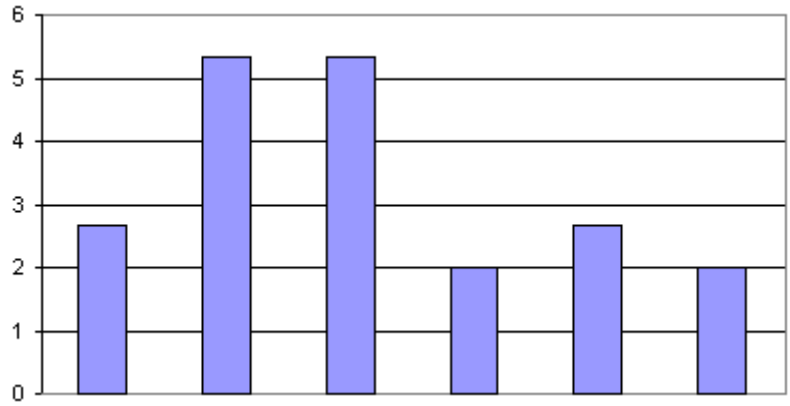

Рис. 7.5 Гістограма частот

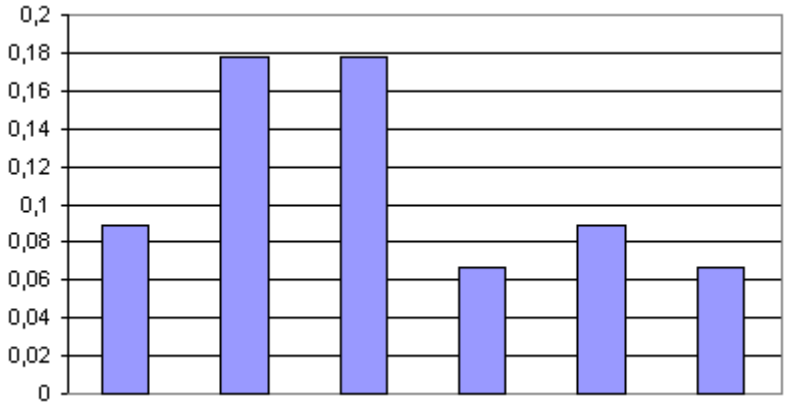

Рис. 7.6 Гістограма відносних частот

Знайдемо вибіркове середнє. Це значення і буде становити середню ціну книги в інтернет-магазинах.

Статистичний розподіл частот можна записати:

x_i	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205
n_i	2	2	2	6	8	2	1	4	2	1

Тоді

$$\overline{x}_B = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \mathbf{K} + x_k \cdot n_k}{n}$$

$$\overline{x_B} = \frac{196 \cdot 2 + 197 \cdot 2 + 198 \cdot 2 + 199 \cdot 6 + 200 \cdot 8 + 201 \cdot 2 + 202 \cdot 1 + 203 \cdot 4 + 204 \cdot 2 + 205 \cdot 1}{30} =$$

=200,17.

Вибіркове середнє можна знайти і по іншому. Наприклад:

$$\overline{x_B} = \frac{1}{30}(196 + 196 + 197 + 197 + 198 + 198 + 199 + ... + 204 + 204 + 205) = 200{,}17$$

де

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x	196	196	197	197	198	198	199	199	199	199	199	199	200	200	200

i	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x	200	200	200	200	200	201	201	202	203	203	203	203	204	204	205

7.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 7

Варіант завдання в табл. 7.4.

Завдання. Вартість книги по математичній статистиці, що продається, в тридцяти різних інтернет-магазинах становить (у гривнях) - дані табл. 7.4.

Побудувати: простий статистичний ряд; варіаційний ряд; інтервальний статистичний розподіл частот (величину кроку розбиття h знайти за формулою $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \cdot \lg(n)}$); інтервальний статистичний розподіл відносних частот, а також знайти вибіркове середнє.

Таблиця 7.4.

Варіант										
1	23	22	19	27	37	27	21	20	27	21
	19	26	23	25	31	22	19	22	26	24
	20	25	24	31	37	20	20	23	25	20
2	12	19	18	23	21	25	26	27	15	18
	17	20	19	22	24	18	24	19	12	21
	18	15	21	25	26	17	23	26	13	25
3	17	18	27	29	16	17	28	29	18	21
	15	16	25	28	15	21	27	26	17	20
	22	23	30	22	17	18	19	28	20	23
4	36	16	35	25	28	33	21	38	28	21
	21	20	26	29	32	34	18	20	30	31
	35	37	38	22	17	28	16	33	29	32
5	22	21	18	26	30	26	17	16	27	30
	15	17	16	21	27	30	18	14	28	29
	13	14	19	22	29	16	15	13	25	28
6	25	20	15	36	30	33	14	26	19	28
	24	14	17	20	24	22	27	29	31	34
	20	26	18	19	23	21	28	30	32	35
7	11	9	22	16	22	24	17	15	22	25
	13	10	23	17	24	26	18	16	21	23
	12	14	15	16	21	23	16	19	20	22
8	42	19	26	27	25	28	22	36	16	28
	26	16	28	24	31	18	29	22	26	17
	41	39	38	37	36	35	33	32	34	40
9	19	18	11	21	19	12	20	20	24	11
	12	17	15	20	18	23	17	24	21	13
	13	16	13	19	24	12	23	11	12	14
10	27	26	27	25	31	30	37	33	17	18
	25	30	26	24	23	21	20	22	19	17
	27	28	29	30	31	32	33	18	17	23
11	18	35	18	26	30	25	22	32	19	20
	19	32	19	22	33	26	27	28	29	30
	31	33	34	32	35	25	24	23	22	20
12	22	27	27	29	31	25	23	25	13	14
	30	28	25	23	21	19	17	20	16	15
	29	26	24	22	20	18	21	18	14	13

Варіант

13	19	18	11	21	19	12	20	20	24	11
	25	19	24	23	21	22	25	11	10	12
	22	20	23	10	18	17	16	15	14	13
14	30	17	28	12	20	32	28	13	33	19
	31	16	27	25	23	21	19	16	14	12
	17	15	26	24	22	20	18	15	13	17
15	20	12	21	29	17	15	21	28	25	23
	19	13	22	28	26	24	15	20	18	17
	11	20	30	27	25	23	22	19	16	15
16	9	14	15	10	12	13	17	20	23	27
	11	13	16	9	20	12	18	21	23	24
	25	26	27	10	9	20	17	18	10	26
17	13	23	17	20	15	27	25	19	22	18
	21	28	18	17	15	13	24	27	29	30
	16	30	15	16	14	12	26	28	19	20
18	7	15	9	14	8	9	10	12	15	19
	21	8	13	12	14	15	16	17	18	20
	6	10	11	22	23	22	20	23	8	7
19	12	18	16	13	19	10	24	28	17	18
	32	26	25	23	24	27	28	29	30	31
	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
20	26	21	19	26	18	34	28	24	19	37
	12	20	18	25	24	33	32	31	30	29
	28	27	26	25	23	22	17	16	15	14
21	16	10	28	33	26	15	21	23	18	20
	30	12	14	16	18	19	17	15	13	11
	20	21	22	23	25	27	29	31	26	24
22	35	41	34	30	28	25	36	39	40	33
	38	36	33	31	29	28	30	32	35	37
	29	30	31	32	34	35	37	39	41	33
23	21	20	21	22	25	26	12	23	14	32
	31	14	15	30	29	24	25	26	27	28
	23	22	19	18	17	16	13	12	31	15
24	40	19	21	31	28	25	20	23	24	26
	39	37	35	34	33	32	31	30	36	38
	22	27	26	25	24	23	22	21	20	19

Варіант										
25	14	20	13	18	22	30	29	14	16	27
	25	28	15	16	12	10	19	20	21	11
	18	17	22	23	24	25	26	27	29	28
26	28	32	33	29	26	23	20	17	31	32
	20	17	31	28	25	22	19	16	20	30
	15	16	30	27	24	21	18	32	29	26
27	15	16	21	23	25	17	22	24	16	27
	29	26	23	18	20	30	16	26	19	32
	31	25	30	19	15	27	31	29	18	17
28	24	27	18	29	16	23	21	17	25	31
	32	26	21	28	19	17	18	20	31	32
	22	25	31	27	20	29	19	21	29	24
29	45	48	38	35	30	44	36	47	46	29
	31	43	37	34	41	45	35	44	43	28
	46	47	42	32	33	38	29	30	31	29
30	52	45	39	53	40	31	30	32	47	49
	33	35	37	39	41	43	45	47	51	48
	50	46	44	42	40	38	36	34	32	37

7.4 Виконання роботи і оформлення результатів

У відповідності до варіанту завдання побудувати простий статистичний ряд; варіаційний ряд; інтервальний статистичний розподіл частот (величину кроку розбиття h знайти за формулою $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}2 \cdot \lg(n)}$); інтервальний статистичний розподіл відносних частот.

В MS Excel побудувати гістограми частот і відносних частот, а також знайти вибіркове середнє.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Поняття вибірки і генеральної сукупності.
2. Поняття простого статистичного ряду.
3. Статистичний розподіл частот і відносних частот, їх графічна інтерпретація.
4. Інтервальний розподіл частот і відносних частот, їх графічна інтерпретація.
5. За допомогою яких числових оцінок оцінюють статистичний розподіл?
6. Вибіркове середнє.
7. Вибіркова дисперсія і вибіркове середньоквадратичне відхилення.

Практичне заняття № 8

Лінійна кореляція

Мета роботи: Дослідити процес визначення сили кореляційного зв'язку. Набути вмінь визначати коефіцієнта кореляції.

Завдання: Визначити: значення коефіцієнта лінійної кореляції і оцінити силу (тісноту) зв'язку між випадковими величинами X та Y.

Задачі практичної роботи:

Вивчити поняття: кореляційної залежності, умовної середньої, рівнянь регресії та коефіцієнта кореляції.

Розглянути представлення даних у вигляді кореляційної таблиці.

Виконати розрахунки відповідно до свого варіанту завдання, наведеного у п 8.3.

Оформити результати розрахунків та продемонструвати їх викладачу.

8.1 Короткі теоретичні відомості

Статистичну залежність називають кореляційною, якщо у разі зміни однієї з величин змінюється середнє значення іншої. Отже, кореляційна залежність – це окремий випадок залежності статистичної. Будь-яка кореляційна залежність є статистичною, але не кожна статистична залежність буде кореляційною.

Нехай дослідні дані, отримані для вивчення залежності між випадковими величинами X і Y такі, що кожному значенню X відповідає кілька значень Y. Наприклад, при X = x величина Y набула значень y_1, y_2, …, y_k і навпаки кожному значенню Y відповідає кілька значень X.

Функціональну залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x називають кореляційною залежністю Y від X:

$$\bar{y}(x) = f(x) \qquad (8.1)$$

Рівняння (8.1) називають рівнянням регресії Y на X (чи Y по X); функцію f(x) – регресією Y на X (Y по X), а її графік – лінією регресії Y на X (Y по X).

Функціональну залежність умовної середньої $\bar{x}_y$ від y називають кореляційною залежністю X від Y:

$$\bar{x}_y = j\,(y) \qquad (8.2)$$

Рівняння (8.2) називають рівнянням регресії X на Y (X по Y); функцію φ(x) – регресією X на Y (X по Y), а її графік – лінією регресії X на Y (X по Y).

Наявність (чи відсутність) зв'язку між випадковими величинами X та Y, а також силу (тісноту) зв'язку характеризують коефіцієнтом кореляції r_{xy}. Коефіцієнт кореляції – безрозмірна величина (причому $|r_{xy}|<=1$), яку використовують для оцінки тісноти тільки лінійного зв'язку між величинами X і Y: чим ближче абсолютна величина коефіцієнта кореляції до одиниці, тим зв'язок сильніше; чим ближче значення $|r_{xy}|$ до нуля, тим зв'язок слабкіше. Якщо $r_{xy}>0$, говорять про додатну кореляцію (у разі зростання однієї з величин інша має тенденцію у середньому до зростання); якщо $r_{xy}<0$, - про від'ємну кореляцію (за зростання однієї з величин інша має тенденцію у середньому до спадання).

Нехай випадкові величини пов'язані лінійною кореляційною залежністю. Необхідно за експериментальними даними знайти рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y та **оцінити силу кореляційного зв'язку**.

Випадок згрупованих даних. Це більш загальний випадок, коли в **n** незалежних дослідах одне і те саме значення x спостерігалося $\mathbf{n_x}$, разів, значення y – $\mathbf{n_y}$, пара чисел (x, y) – $\mathbf{n_{xy}}$ разів. Такі дані групують, тобто підраховують частоти $\mathbf{n_x}$, $\mathbf{n_y}$, $\mathbf{n_{xy}}$ і подають у вигляді таблиці, яку називають кореляційною.

Приклад 8.1

У **n** (**n** = 16) незалежних дослідах були отримані такі дані, що виражають залежність густини водяних розчинів бромистоводнєвоі кислоти HBr від її концентрації при 25°C:

Таблиця 8.1 Дослідні дані

Концентрація HBr, % (мас.)	15	15	15	15	16	16	16	16
Густина, г/см^3	1,11	1,12	1,11	1,11	1,12	1,12	1,13	1,12

Концентрація HBr, % (мас.)	17	17	17	17	18	18	18	18
Густина, г/см^3	1,13	1,12	1,13	1,13	1,14	1,13	1,13	1,14

Представити ці дані у вигляді кореляційної таблиці.

Розв'язок.

На перетині рядків і стовпців (табл. 2.2) знаходяться частоти $\mathbf{n_{xy}}$. Наприклад, частота 3, що знаходиться на перетині першого рядка і першого стовпця, вказує, що пара чисел (15; 1.11) спостерігалася в 16 дослідах три рази.

Таблиця 8.2. Кореляційна таблиця

Значення y_i (густина, г/см^3)	Значення x_i (концентрація HBr, % (мас.))				
	15	16	17	18	$\mathbf{n_y}$
1,11	3				3
1,12	1	3	1		5
1,13		1	3	2	6
1,14				2	2
$\mathbf{n_x}$	4	4	4	4	**n = 16**

В останньому стовпці записані суми частот рядків, що вказують, скільки разів спостерігалось значення y_i, випадкової величини Y у сполученні і різними значеннями випадкової величний X. В останньому рядку записані суми частот стовпців, що вказують, скільки разів значення x_i величини X спостерігалося з різними значеннями величини Y.

У нижньому правому куті записана сума всіх частот (загальна кількість я проведених дослідів **n**). Очевидно, що $\sum n_x = \sum n_y = n$.

Для нашого приклада $\sum n_x = 4+4+4+4 = 16$ і $\sum n_y = 3+5+6+2 = 16$.

Коли кореляційна таблиця побудована (чи задана заздалегідь) можна знайти рівняння прямих ліній регресії та оцінити силу кореляційного зв'язку (за допомогою вибіркового коефіцієнта кореляції).

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X, отримане за згрупованими даними, матиме вигляд

$$\bar{y}_x = r_{yx}x + b$$

де r_{yx} – вибірковий коефіцієнт регресії Y на X.

Тут вже використовується поняття умовної середньої $\bar{y}_x$.

Введемо наступні позначення для відповідних середніх величин:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{xi}x_i}{n};\ \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{yi}y_i}{n};\ \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{xi}x_i^2}{n};\ \overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{yi}y_i^2}{n}.$$

Враховуючи те, що кожна пара чисел (x, y) спостерігається у n дослідах n_{xy} разів ($\sum xy = \sum n_{xy}xy$), формули для визначення ρ_{xy} і b можна записати у вигляді:

$$r_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}; \qquad (8.3)$$

$$b = \frac{n\overline{x^2}\bar{y} - \bar{x}\sum n_{xy}xy}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)}. \qquad (8.4)$$

Оскільки $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = s_x^2$, то

$$r_{yx} = \frac{\sum n_{xy}xy - n\bar{x}\bar{y}}{ns_x^2}.$$

Помноживши попередній вираз на σ_x/σ_y, отримаємо вираз для вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y}. \qquad (8.5)$$

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної практичної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури для даних методичних вказівок.

8.2 Приклади розв'язання задач

Приклад 8.1

Нехай, потрібно визначити значення коефіцієнта лінійної кореляції і оцінити силу (тісноту) зв'язку між випадковими величинами X та Y стосовно даних заданих у вигляді кореляційної таблиці:

Значення y_i	Значення x_i			
	21	**26**	**31**	**36**
8	2	3		
10	1	10	5	
12		4	4	
14			5	3

Введемо дані таблиці в комірки MS Excel

Значення	Значення x_i				$\mathbf{n_y}$
y_i	**21**	**26**	**31**	**36**	
8	2	3			5
10	1	10	5		16
12		4	4		8
14			5	3	8
$\mathbf{n_x}$	3	17	14	3	**n=37**

І в середовищі MS Excel виконаємо потрібні розрахунки.

Знайдемо середні значення наступних величин:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{xi} x_i}{n} = \frac{3 \cdot 21 + 17 \cdot 26 + 14 \cdot 31 + 3 \cdot 36}{37} = 28{,}2973;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{yi} y_i}{n} = \frac{5 \cdot 8 + 16 \cdot 10 + 8 \cdot 12 + 8 \cdot 14}{37} = 11{,}02703;$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{xi} x_i^2}{n} = \frac{3 \cdot 21^2 + 17 \cdot 26^2 + 14 \cdot 31^2 + 3 \cdot 36^2}{37} = 815{,}0541;$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_{yi} y_i^2}{n} = \frac{5 \cdot 8^2 + 16 \cdot 10^2 + 8 \cdot 12^2 + 8 \cdot 14^2}{37} = 125{,}4054.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою:

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} xy - n\bar{x}\bar{y}}{n s_x s_y}.$$

Перед тим як скористатися нею необхідно знайти: s_x, s_y і $\sum n_{xy} xy$.

Середні квадратичні відхилення s_x і s_y можна знайти після визначення відповідних значень дисперсій: $S_x = s_x^2$ і $S_y = s_y^2$.

Відомо, що обчислити потрібні значення дисперсій можна за формулами $\overline{x^2} - \bar{x}^2 = s_x^2$ і $\overline{y^2} - \bar{y}^2 = s_y^2$. Знайдемо їх:

$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 815{,}0541 - (28{,}2973)^2 = 14{,}31702;$

$s_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 125{,}4054 - (11{,}02703)^2 = 3{,}81008.$

Тоді:

$s_x = \sqrt{s_x^2} = 3{,}783784;\ s_y = \sqrt{s_y^2} = 1{,}951943.$

Враховуючи те, що кожна пара чисел (x, y) спостерігається у n дослідах n_{xy} разів, то $\sum xy = \sum n_{xy} xy$. Визначення $\sum n_{xy} xy$ можна виконати наступним чином:

- знайти по рядкам:

$$\sum n_{xy} xy = 2 \cdot 21 \cdot 8 + 3 \cdot 26 \cdot 8 + 1 \cdot 21 \cdot 10 + 10 \cdot 26 \cdot 10 + 5 \cdot 31 \cdot 10 + 4 \cdot 26 \cdot 12 + 4 \cdot 31 \cdot 12 + 5 \cdot 31 \cdot 14 + 3 \cdot 36 \cdot 14 =$$

$$= (2 \cdot 21 + 3 \cdot 26) \cdot 8 + (1 \cdot 21 + 10 \cdot 26 + 5 \cdot 31) \cdot 10 + (4 \cdot 26 \cdot + 4 \cdot 31) \cdot 12 + (5 \cdot 31 + 3 \cdot 36) \cdot 14 = 11738;$$

- знайти по стовпцям:

$\sum n_{xy} xy$ = 2·8·21+1·10·21+
+3·8·26+10·10·26+4·12·26+
+5·10·31+4·12·31+5·14·31+
+3·14·36=

=(2·8+1·10)·21+(3·8+10·10+4·12)·26+(5·10+4·12+5·14)·31+(3·14)·36= 11738.

Підставимо значення в формулу розрахунку вибіркового коефіцієнта кореляції (8.5) і отримаємо:

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} xy - n\overline{x}\overline{y}}{n s_x s_y} = \frac{11738 - 37 \cdot 28{,}2973 \cdot 11{,}02793}{37 \cdot 3{,}783784 \cdot 1{,}931943} = 0{,}705168 .$$

Отримане значення вибіркового коефіцієнта кореляції свідчить про достатньо сильний зв'язок між випадковими величинами X та Y (абсолютна величина коефіцієнта кореляції досить близька до одиниці).

8.3 Варіанти завдань до практичної роботи № 8

Варіанти завдань до наведені в таблиці

1

Значення y_i	Значення x_i			
	1,2	**1,4**	**1,6**	**1,8**
2	2	3		
4		5	7	
6			2	1
8				4

2

Значення y_i	Значення x_i			
	3	**6**	**8**	**10**
0,2	1	5		
0,4		3	2	
0,6	4		5	
0,8			2	1

3

Значення y_i	Значення x_i			
	5	**15**	**25**	**35**
21	3	4		
23		5		
25		2	5	4
27			2	1

4

Значення y_i	Значення x_i			
	2	**4**	**6**	**8**
10	2			
14		4	5	
18		5	3	1
22		4	2	2

5

Значення y_i	Значення x_i			
	5	**10**	**15**	**20**
11	2			
13		10	6	
15		5	4	
17			3	2

6

Значення y_i	Значення x_i			
	1	**3**	**5**	**7**
3,2	2	1	5	
4,2		5	10	
5,2			5	2
6,2			5	1

7

Значення y_i	Значення x_i			
	0,6	**1,0**	**1,4**	**1,8**
3		2	5	
6	4	5		
9		4	5	1
12			4	1

8

Значення y_i	Значення x_i			
	8	**16**	**24**	**32**
10	4	10		
20		12	6	2
30			4	1
40			4	3

9

Значення y_i	Значення x_i			
	8	**12**	**16**	**20**
31	1	2	5	
35		4	10	
39		12	6	
43			8	2

10

Значення y_i	Значення x_i			
	15	**17**	**19**	**21**
7	2			
10	2	5		
13		5	10	
16			5	1

11

Значення y_i	Значення x_i			
	1	**7**	**13**	**19**
6	3	5		
8		4		
10		10	2	2
12		5	3	1

12

Значення y_i	Значення x_i			
	11	**13**	**15**	**17**
42	2	4	6	
44		5	1	
46		8		
48		4	3	2

13

Значення y_i	Значення x_i			
	4	**8**	**12**	**16**
0,5	4	2		
1,0		3	5	2
1,5		5	2	
2,0		3	2	1

14

Значення y_i	Значення x_i			
	21	**31**	**41**	**51**
8	1	4		
10	1	10	5	
12	3		4	
14			5	3

15

Значення y_i	Значення x_i			
	1	**5**	**9**	**13**
7	3	2	5	
12		5		
17			10	
22		4	5	2

16

Значення y_i	Значення x_i			
	3	**6**	**9**	**12**
1,8	3	12		
2,8		16		
3,8		32	10	
4,8			11	4

8.4 Виконання роботи і оформлення результатів

Обчислити в MS Excel у відповідності зі своїм варіантом завдання (наданий викладачем) значення коефіцієнта лінійної кореляції і оцінити силу (тісноту) зв’язку між випадковими величинами X та Y.

Зробити обґрунтований висновок про зв’язок між випадковими величинами X та Y.

Продемонструвати розрахунки викладачу.

Питання для самопідготовки

1. Кореляційна залежність?
2. Поняття умовної середньої?
3. Рівняння регресії?
4. Коефіцієнт лінійної кореляції?

Список рекомендованої літератури

Основна література

1. Брановицька С.В. Обчислювальна математика та програмування. Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник [Текст]/ С.В. Брановицька, Р.Б. Медведєв, Ю.Я. Фіалков. - К.: ІВЦ «Видавництво “Політехніка”», 2004. – 220 с.
2. Математична обробка експериментальних даних. Посібник для студентів хіміко-технологічного факультету до виконання курсової роботи з дисципліни: «Обчислювальна математика та програмування» [Текст]/ С.В. Брановицька, С.Г. Бондаренко, О.О. Квітка, Р.Б. Медведєв, А.І. Ткачук. – Київ: НТУУ «КПІ», 1997. – 76 с. – Рос. мовою.
3. Основы вычислительной математики: В 2 т. [Текст]/ Б. П. Демидович, И. А. Марон. - М.: Мир, 1989. - 439с.
4. Демидович Б. П. Численные методы анализа [Текст]/ Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Физматгиз, 1963.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов [Текст]/ В. Е. Гмурман. - М.: Высш. шк., 1999. – 478 с.
6. Брановицька С.В. Теорія ймовірностей та випадкові процеси: метод. вказівки до викон. розрахункової роботи для студ. напряму підготов. 6.050202 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані процеси». Ч 2: Математична статистика [Текст]/ С.В. Брановицька, Т.В. Бойко, О.В.Сангінова. - К.: НТУУ «КПІ», ВПІ ВПК «Політехніка», 2008. – 48 с.

Додаткова

7. Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст]/ Н. В. Копченова, И. А. Марон - М.: Мир., 2008. – 184 с.
8. Гутер Р.С. Основы теории вероятностей: Учеб. Пособие [Текст]/ Р.С.Гутер , Б. В. Овчинский .– Ташкент: Укитувчи, 1978. – 166 с.
9. Батунер Л.М. Математические методы в химической технике [Текст]/ Л.М. Батунер, М.Е. Позин. – Л.: «Химия», 1971.