МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

АВТОМАТИЧНЕ РЕГУЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ У ВИРОБНИЦТВІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

спеціальності

8.05130101 "Хімічні технології неорганічних речовин"

ЧАСТИНА 1

Навчальне електронне видання

Рекомендовано Вченою радою ХТФ НТУУ «КПІ»

Київ 2015

Автоматичне регулювання та управління технологічними процесами у виробництві: метод. вказівки до викон. лаб. роб. та самостійної роботи для студ. спеціальн. “Хімічні технології неорганічних речовин”, Ч.1»/ - К: НТУУ «КПІ», 2015. – 80 с. Автори: С.Г. Бондаренко, С.Л. Мердух, О.В. Сангінова

Гриф надано Вченою радою ХТФ НТУУ “КПІ”,
протокол №6 від 22.06.2015 р.

Навчальне електронне видання

АВТОМАТИЧНЕ РЕГУЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ У ВИРОБНИЦТВІ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

спеціальностей

8.05130101 **"Хімічні технології неорганічних речовин"**

ЧАСТИНА 1

Автори:	Бондаренко Сергій Григорович Мердух Світлана Леонідівна Сангінова Ольга Вікторівна
Відповідальний редактор:	С.Г. Бондаренко, к.т.н., доц.
Рецензент:	В.І. Супрунчук

Зміст

Передмова

Роль і значення питань управління технологічними процесами у підготовці фахівців спеціальності 8.05130101 "Хімічні технології неорганічних речовин" достатньо високі. Це пов'язано з тим, що сучасні технологічні об'єкти хімічної промисловості мають порівняно високий рівень автоматизації і фахівець з хімічної технології повинен не тільки обслуговувати і вдосконалювати технологічні процеси, а й системи управління ними. Повна інформація про хід технологічного процесу, яку надають системи автоматизованого керування, дозволить забезпечити підвищення якості продукції і ведення процесу в безаварійному режимі.

Методичні вказівки розроблено відповідно до програми підготовки спеціалістів для студентів спеціальності "Хімічні технології неорганічних речовин". Дисципліна «Автоматичне регулювання та управління технологічними процесами у виробництві» відноситься до циклу професійної та практичної підготовки і є базовою у підготовці спеціалістів вказаних спеціальностей.

Робота студента над учбовим матеріалом дисципліни: «Автоматичне регулювання та управління технологічними процесами у виробництві», складається з наступних видів робіт: вивчення матеріалу по навчальних посібниках і підручниках; відвідування лекцій; виконання лабораторних робіт; написання модульної контрольної роботи; виконання та захист розрахунково-графічної роботи; індивідуальні консультації; здача диференціального заліку. При цьому значна частина часу відводиться на самостійну роботу.

Представлені матеріали мають за мету закріплення знань та набуття вміння застосовувати отримані в процесі вивчення дисципліни «Автоматичне регулювання та управління технологічними процесами у виробництві» при розрахунках систем автоматичного керування. Надані теоретичні відомості сприятимуть засвоєнню матеріалу курсу та можуть бути використані під час виконання розділів курсових проектів та робіт, що пов'язані з автоматизованим та автоматичним керуванням хіміко-технологічних процесів та у дипломному проектуванні.

Дане видання призначено для надання допомоги студентам денної форми навчання спеціальності “Хімічні технології неорганічних речовин” у вивченні зазначеної дисципліни. З цією метою у даному виданні наведений перелік тем, які студент повинен вивчити, та, за матеріалами яких виконуються лабораторні роботи, надані методичні вказівки з виконання цих робіт, наведені основні теоретичні положення з ілюстрацією на конкретних прикладах. Методичні вказівки містять завдання для лабораторних робіт, вимоги до оформлення звіту і контрольні питання для самопідготовки студентів.

В частині 1 запропонованих методичних вказівок розглядається базовий матеріал дисципліни «Автоматичне регулювання та управління технологічними процесами у виробництві», що є основою для дослідження і розробки автоматизованих систем управління технологічними процесами.

Лабораторна робота № 1
Моделі статики об'єктів керування

Мета та основні завдання: Дослідити процес отримання моделей статики складного технологічного об’єкту керування. Набути вмінь побудови і аналізу статичних характеристик.

Завдання[1]. Вивчити поняття статичної характеристики, а також методи отримання статичних характеристик послідовно і паралельно з’єднаних елементів, а також елементів, що охоплені зворотним зв’язком. Розглянути методи лінеаризації статичних характеристик.

1.1. Короткі теоретичні відомості

Система автоматичного керування (або об'єкт управління чи будь-яка інша ланка системи) може знаходитись у двох станах: статики або динаміки. Статикою називають статичний (сталий) режим роботи системи, коли всі впливи, що діють на систему, і змінні системи мають стале значення і не змінюються з часом. Статичний режим характеризується узгодженістю матеріальних та енергетичних входів і виходів об'єкту і незмінністю в часі його параметрів. У динамічному режимі всі (або деякі) впливи і всі змінні системи змінюються з часом.

Залежності, що встановлюють зв'язок між величиною, що досліджується (вихідна величина), і впливом на вході елементу (технічний пристрій) системи (або системи в цілому), називають характеристиками елементів (або системи). При вивченні властивостей системи керування чи її елементів важливе місце займають дослідження, присвячені вивченню статичних і динамічних характеристик. Оцінка якості функціонування систем автоматичного керування базується на дослідженні статичних і динамічних характеристик.

Дослідження сталих станів є першим і основним питанням при дослідженні і розрахунках будь-яких систем керування. Так, дослідження

[1]Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

властивостей технологічних процесів як об'єктів керування завжди починається з вивчення статичних властивостей процесу. Всі змінні, що характеризують технологічний процес, умовно підрозділяються на три групи (рис.1.1): регульовані величини – це ті параметри, які характеризують протікання процесу і, які необхідно підтримувати на заданому значенні (у загальному випадку їх може бути декілька, а в окремому випадку – це один регульований параметр, наприклад температура, рівень і т. п.); регулюючі впливи (параметри управління) – це ті параметри, зміна яких спричиняє заплановану зміну в ході процесу і, які можна змінювати (їх також може бути декілька або один, наприклад, витрата пари, реагенту і т. п.); збурюючі впливи – це параметри, зміна яких порушує нормальний хід технологічного процесу і спричиняє відхилення регульованих параметрів від заданого значення. Після того, як виділені основні параметри, що характеризують технологічний процес, необхідно виявити статичні зв'язки (статичні характеристики) між цими параметрами.

Рис.1.1 Параметри технологічних процесів

Статичні характеристики

Статичною характеристикою елемента системи (системи в цілому) називається залежність вихідної величини (досліджуваної змінної) від вхідного впливу в сталому режимі. Статична характеристика є математичною моделлю каналу впливу об'єкту для його функціонування в сталому режимі.

Для елемента системи (рис.1.2), що має один вхід і один вихід (стан якого визначається лише однією координатою, що залежить від одного керуючого впливу), існує тільки одна статична характеристика, що являє собою залежність вихідної величини φ від вхідного впливу μ в сталому режимі: $\varphi = f(\mu)$. (1.1)

Рис.1.2 Елемент системи

Статична характеристика може бути представлена алгебраїчним рівнянням (наприклад, залежність (1.1)), таблицею (таблична функція) або графіком. Статичні характеристики можуть бути лінійними або нелінійними. Якщо характеристика описується лінійним рівнянням і має вид прямої лінії (рис.1.3-1), вона лінійна. Об'єкт (або елемент системи), що має таку характеристику, називають лінійним. Якщо характеристика описується нелінійним рівнянням і має криволінійний вигляд (рис.1.3-2) або вигляд ламаної лінії (рис.1.3-3), то вона нелінійна і об'єкт буде також нелінійним.

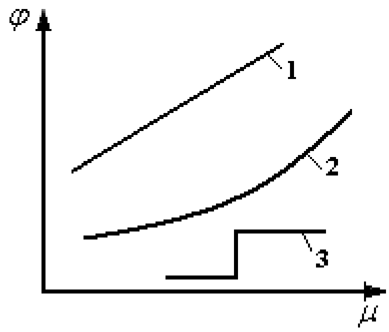


Рис.1.3 Статичні характеристики

Якщо об'єкт має декілька входів, то він описується за допомогою сімейства або сімейств статичних характеристик. Об'єкт, що наведений на рис.1.4, має два сімейства статичних характеристик (рис.1.5).

Рис.1.4 Об'єкт з двома входами

Перше сімейство характеристик – це криві залежності $x=F(f_1)$ для ряду фіксованих значень f_2 (f_{21}, f_{22}, f_{23}), а друге сімейство характеристик – це криві залежності $x=F(f_2)$ для ряду фіксованих значень f_1 (f_{11}, f_{12}, f_{13}).

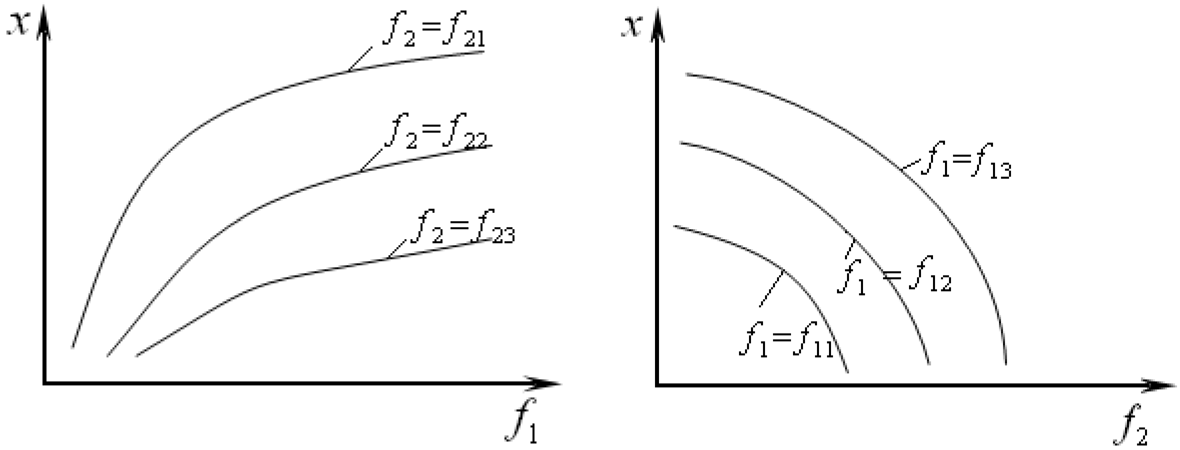


Рис.1.5 Сімейства статичних характеристик

У загальному випадку система може характеризуватися *l* координатами ($x_{вих1}$, $x_{вих2}$,..., $x_{вихl}$), що залежать від m впливів на систему ($x_{вх1}$, $x_{вх2}$,..., $x_{вхm}$), як показано на рис.1.6.

Рис.1.6 Система регулювання

Сталий стан такої системи можна описати системою рівнянь:

$$\begin{cases} X_{вих1} = f_1(X_{вх1}, X_{вх2}, ..., X_{вхm}) \\ X_{вих2} = f_2(X_{вх1}, X_{вх2}, ..., X_{вхm}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{вих_l} = f_l(X_{вх1}, X_{вх2}, ..., X_{вхm}) \end{cases}.$$

Це і будуть рівняння статики системи.

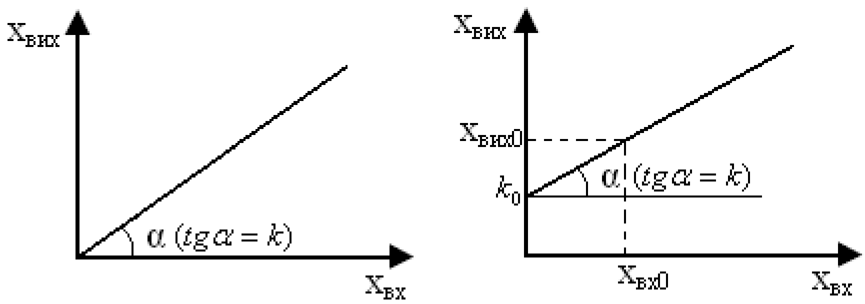
Рівняння статики системи можна отримати з рівняння динаміки. Для цього потрібно прирівняти до нуля всі похідні від координат і від збурюючих впливів, оскільки і ті й інші в сталому режимі приймають постійні значення. Якщо динаміка системи описується наступним рівнянням:

$$a_n \frac{d^n x_{вих}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{вих}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx_{вих}}{dt} + a_0 x_{вих} = b_m \frac{d^m x_{вх}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{вх}}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx_{вх}}{dt} + b_0 x_{вх}$$

,

де $x_{вх}$, $x_{вих}$ – вхідний і вихідний сигнали; $a_0,\ldots, a_n$; $b_0,\ldots, b_m$ – коефіцієнти, то рівняння статики системи буде алгебраїчним рівнянням виду: $a_0 x_{вых} = b_0 x_{вх}$, що зв'язує вхідний і вихідний параметри системи в статиці.

Тоді $x_{вих} = \frac{b_0}{a_0} x_{вх} = k x_{вх}$ і статична характеристика матиме вигляд прямої, що проходить через початок координат (рис.1.7-а). На рис.1.7-б показано загальний вигляд лінійної статичної характеристики, рівняння якої матиме вигляд: $x_{вих} = k_0 + k x_{вх}$, де k_0, k – постійні коефіцієнти. Коефіцієнт k називають коефіцієнтом передачі (або коефіцієнтом підсилення).



а) б)

Рис.1.7 Статичні характеристики лінійної системи

Для лінійних систем коефіцієнт передачі визначається як відношення приростів вихідної і вхідної величин у сталому режимі – $\frac{\Delta x_{вих}}{\Delta x_{вх}}$.

Тобто $k = \frac{\Delta x_{вих}}{\Delta x_{вх}}$, (1.2)

де $\Delta x_{вих} = x_{вих} – x_{вих0}$, $\Delta x_{вх} = x_{вх} – x_{вх0}$ – прирости вихідної і вхідної величин у сталому режимі; $x_{вх0}$, $x_{вих0}$ – значення вхідної і вихідної величин в робочій точці (точка номінального режиму роботи системи (об'єкту)). Функціонування технологічних об'єктів управління зазвичай має деяку допустиму область – нормальний режим роботи технологічного процесу. Для технологічних об'єктів під допустимою областю зміни параметрів розуміють обмеження, що визначаються технологічним регламентом (це мінімальні і максимальні значення параметрів, в межах яких технологічний процес протікає нормально).

Якщо об'єкт має декілька входів, то на вихідну величину різні входи впливають по різному. При оцінюванні сили впливу вхідних параметрів на вихідні оперують поняттям чутливості. За допомогою величини чутливості каналу визначають вибір каналу керування. Чим більша чутливість каналу керування, тим більш ефективним буде керування з використанням цього каналу. А надто висока чутливість каналу збурення може принести багато неприємностей. Чутливість каналу впливу об'єкту оцінюють відношенням приросту вихідної і вхідної величин – $\frac{\Delta x_{вих}}{\Delta x_{вх}}$. Для об'єктів, що мають лінійні статичні характеристики відношення $\frac{\Delta x_{вих}}{\Delta x_{вх}}$ стале і дорівнює коефіцієнту передачі об'єкту. Таким чином, канал керування з більшим коефіцієнтом передачі є більш переважним в якості каналу керування вихідною величиною. Для нелінійних об'єктів, що мають нелінійні статичні характеристики, відношення $\frac{\Delta x_{вих}}{\Delta x_{вх}}$ змінне і можна говорити тільки про функцію чутливості.

Лінеаризація статичних характеристик

Практично всі статичні характеристики реальних об'єктів і елементів систем регулювання нелінійні. Розрахунок систем регулювання з нелінійними статичними характеристиками є досить складним. У нелінійних об'єктів статична характеристика може носити суттєво нелінійний характер або мати несуттєву нелінійність. Якщо характеристика має несуттєву нелінійність, то з математичної точки зору це означає, що графік статичної характеристики повинен мати гладку форму (наприклад, характеристика 2 на рис. 1.3). Тоді в обмеженому діапазоні зміни вхідної величини така характеристика може бути приблизно замінена (апроксимована) лінійною функцією. Наближена заміна нелінійної функції лінійною називається ***лінеаризацією.*** Така процедура цілком правомірна, бо в процесі роботи об'єкту його вхідна величина змінюється в невеликому діапазоні навколо базового значення і при цьому, відхилення вихідного параметру в реальних умовах роботи об'єктів повинні бути незначними. Якщо розглядати роботу елементів системи (чи системи в цілому) у деякому невеликому околі точки, прийнятої за базову, то в ряді випадків правомірно абстрагуватися від нелінійної статичної характеристики в околі зазначеної точки і нелінійну статичну характеристику замінити наближеною лінійною.

Не всі статичні характеристики піддаються лінеаризації. До характеристик, що не піддаються лінеаризації, відносять статичні характеристики, що мають суттєво нелінійний характер (рис.1.8 – а), релейні статичні характеристики (рис.1.8 – б, в), статичні характеристики, що мають зону нечутливості (рис.1.8 – г, д), характеристики з гістерезисом – неоднозначні статичні характеристики (рис.1.8 – е), і багато інших.

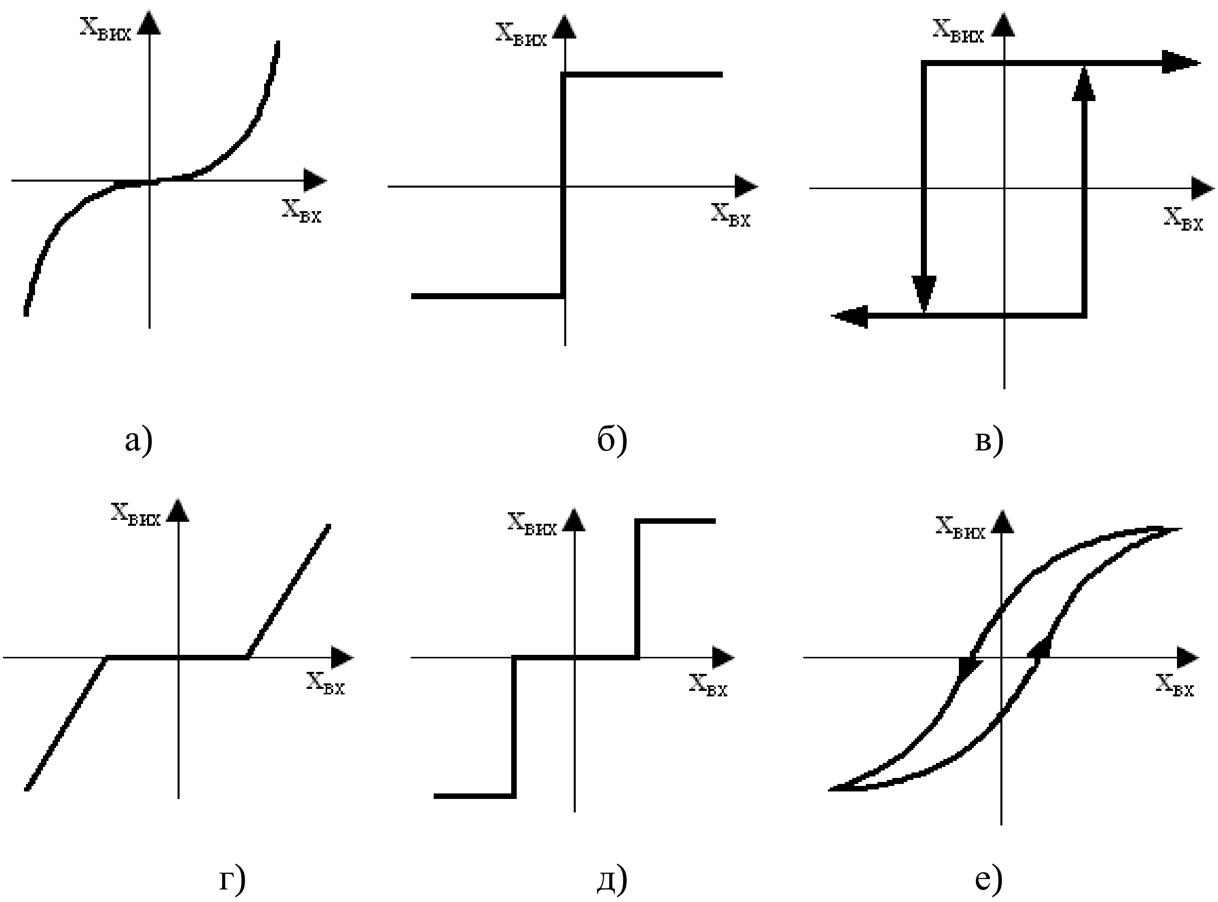


Рис.1.8 Статичні характеристики нелінійних систем

Основою для лінеаризації слугує припущення про достатньо невеликі відхилення всіх змінних, що входять в рівняння системи, і саме тоді на достатньо малій ділянці криволінійну характеристику можна замінити відрізком прямої.

Лінеаризацію можна виконувати в широкому діапазоні зміни вхідного параметра і в вузькому. При лінеаризації в широкому діапазоні є небезпека отримання неадекватної лінійної характеристики. Тому лінеаризувати в широкому діапазоні можна лише характеристики з несуттєвою нелінійністю, що дуже близькі до лінійних характеристик. Лінеаризацію в вузькому діапазоні називають лінеаризацією в околі робочої точки і така лінеаризація є найбільш поширеною. Наприклад, більшість систем регулювання відноситися до класу систем автоматичної стабілізації режиму роботи об'єкту відносно його робочої точки (тобто відносно номінального режиму роботи об'єкту). У цьому випадку в процесі роботи об'єкту відхилення змінних відносно робочої точки будуть малі, що дозволяє виконувати лінеаризацію статичної характеристики в околі робочої точки і використовувати лінійні моделі об'єкту керування.

Лінеаризація зазвичай здійснюється двома способами: графічним і аналітичним.

Графічна лінеаризація

Графічну лінеаризацію проводять методами: лінеаризація в точці (метод дотичної) або лінеаризація на відрізку (метод січної).

Лінеаризація в точці

Якщо статична характеристика задана графічно, що найчастіше буває на практиці, то лінеаризація в точці $x_{вх0}$ полягає в заміні кривої лінії в околі даної точки дотичною до кривої в точці $x_{вх0}$. Якщо інтервал можливої зміни параметрів знаходиться в межах від $x_{вх1}$ до $x_{вх2}$, то

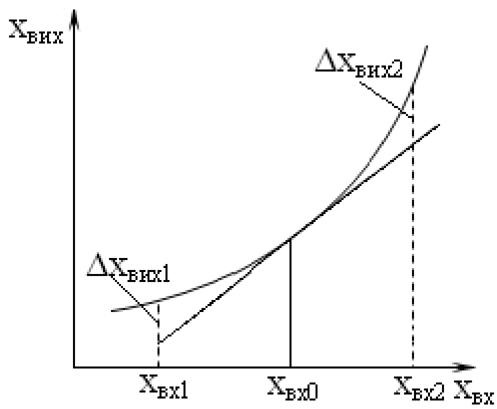


Рис.1.9 Лінеаризація в точці

дотичну необхідно проводити так, щоб величини $\Delta x_{вих1}$ і $\Delta x_{вих2}$ дорівнювали одна одній ($\Delta x_{вих1} = \Delta x_{вих2}$), як це показано на рис.1.9. При цьому, точність лінеаризації буде визначатись величиною $\Delta x_{вих} = \Delta x_{вих1} = \Delta x_{вих2}$.

Лінеаризація на відрізку

При збільшенні кривизни нелінійної статичної характеристики лінеаризація в точці буде занадто грубою і похибка лінеаризації буде недопустимою. В цьому випадку проводять лінеаризацію на відрізку. Вона полягає в наступному:

1) проводять дотичну (як і при лінеаризації в точці) до кривої в точці $x_{вх0}$ – пряма CD на рис.1.10;
2) через точки характеристики при $x_{вх1}$ і $x_{вх2}$ проводять пряму AB (хорда);
3) посередині між дотичною і хордою проводять пряму так, щоб виконувалася умова: $\frac{\Delta X_{вих1}}{2} = \frac{\Delta X_{вих2}}{2}$.

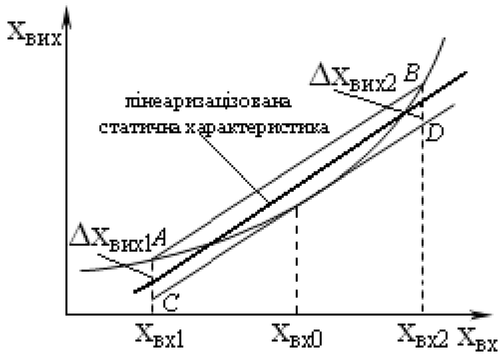


Рис.1.10 Лінеаризація на відрізку

Ця пряма апроксимує нелінійну характеристику і буде шуканою лінеаризованою статичною характеристикою. При цьому, точність лінеаризації буде визначатись величиною $\Delta x_{вих} = \Delta x_{вих1}/2 = \Delta x_{вих2}/2$. Очевидно, що лінеаризація на відрізку буде удвічі точніша, ніж лінеаризація в точці.

Аналітична лінеаризація статичних характеристик

Якщо статична характеристика задана в аналітичній формі, тобто у вигляді рівняння $x_{вих} = f(x_{вх})$, то лінеаризацію цієї характеристики в околі точки $x_{вх0}$ можна провести розкладанням даної функції в ряд Тейлора:

$$x_{вих} = f(x_{вх0}) + \frac{f'(x_{вх0})}{1!}(x_{вх} - x_{вх0}) + \frac{f''(x_{вх0})}{2!}(x_{вх} - x_{вх0})^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_{вх0})}{n!}(x_{вх} - x_{вх0})^n .$$

На практиці зазвичай обмежуються першими двома членами, і формула для аналітичної лінеаризації матиме вид:

$$x_{вих} = f(x_{вх0}) + f'(x_{вх0})\,(x_{вх} - x_{вх0}). \qquad (1.3)$$

Тут $x_{вх0}$ належить відрізку $[x_{вх1},\ x_{вх2}]$, а коефіцієнт рівняння (1.3), що дорівнює першій похідній, розраховують наступним чином:

обчислюється при підстановці $x_{вх} = x_{вх0}$ в $f'(x_{вх0}) = \dfrac{d[f(x_{вх})]}{dx_{вх}}$.

Вибір способу лінеаризації залежить від кожного конкретного випадку. У правильно функціонуючій САР зазвичай відхилення від заданого режиму невеликі, і тому лінеаризація можлива й не дає значних похибок.

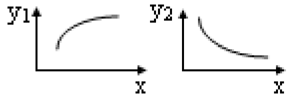
При переведенні процесу в новий режим, відмінний від попереднього, використання отриманих раніше лінеаризованих статичних характеристик не можливе. Необхідно знову виконати лінеаризацію в околі нової робочої точки і отримати нову лінеаризацізовану статичну характеристику, яку і використати в подальших розрахунках.

Статичні характеристики з'єднання елементів (перетворення статичних характеристик)

Для побудови статичної характеристики систем керування необхідно знати статичні характеристики кожного з елементів, що входять до складу системи. Крім того, об'єкт керування може складатися з декількох пристроїв. Не завжди можливо визначити статичну характеристику об'єкта в цілому, але існує можливість визначити статичні характеристики окремих елементів. Для визначення загальної статичної характеристики необхідно знати правила перетворення статичних характеристик. При цьому, будемо розглядати елементи направленої дії – детектуючі елементи. Вони відрізняються тим, що в них впливи передаються тільки в одному напрямку – зі входу на вихід.

Статична характеристика паралельно з'єднаних елементів

Нехай два елемента з'єднані паралельно зустрічно (рис.1.11) – їх виходи сумуються. Позначимо сигнал на вході елементів *x*, а на виході – y_1 і y_2. Статичні цих елементів відомі: $y_1=f(x)$ і $y_2=f(x)$.



Необхідно визначити результуючу статичну характеристику $y = f(x)$.

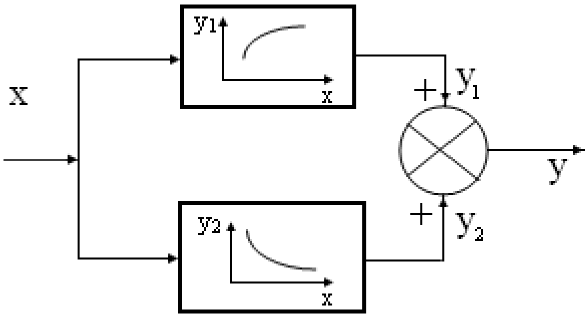


Рис.1.11 Система з паралельно з'єднаними елементами

При паралельному з'єднанні елементів (рис.1.11) вхідний сигнал надходить одночасно на обидва елементи, а вихідний сигнал складається із суми вихідних сигналів елементів $y = y_1 + y_2$.

Для графічної побудови статичної характеристики системи, що утворена з паралельно з'єднаних елементів, статичні характеристики яких відомі, необхідно побудувати характеристики всіх цих елементів в однаковому масштабі і просумувати їх ординати при відповідних значеннях вхідної величини, як це показано на рис 1.12 (при значенні входу x_1).

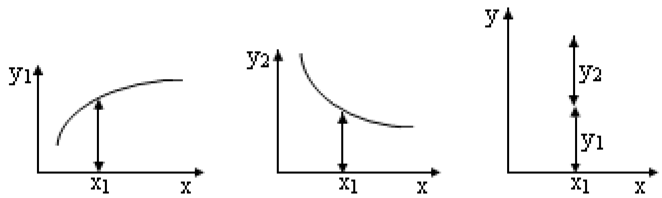


Рис.1.12 Побудова статичної характеристики
паралельно з'єднаних двох елементів

Таким чином, отримана результуюча характеристика дорівнюватиме сумі характеристик двох елементів. Аналогічно знаходять результуючу характеристику при більшій кількості елементів у з'єднанні. При знаходженні результуючої характеристики слід враховувати знак на суматорі. Якщо для деякого елемента вихідний сигнал направляється на суматор зі знаком мінус, то відповідну ординату слід віднімати.

Якщо статичні характеристики окремих елементів лінійні (або лінеаризовані), то вони описуються рівняннями вигляду: $y_i = k_i \cdot x_i$, де x_i, y_i, k_i – відповідно вхід, вихід і коефіцієнт передачі i-го елементу. Згідно з розглянутим раніше перетворенням, загальний коефіцієнт передачі системи дорівнюватиме сумі коефіцієнтів передачі окремих елементів:

$k = k_1 + k_2 + ... + k_n = \sum_{1}^{n} k_i$, де n – кількість паралельно з'єднаних елементів.

Тоді результуюча статична характеристик паралельно з'єднаних лінійних елементів матиме вигляд: $y = k \cdot x$. (1.4)

Статична характеристика послідовно з'єднаних елементів

Нехай три елементи з'єднані послідовно (рис.1.13). При послідовному з'єднанні елементів вихід попереднього елемента є входом у наступний елемент. Позначимо сигнал на вході системи x, а на виході – y.

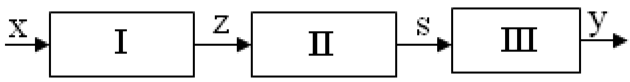


Рис.1.13 Система з трьома послідовно з'єднаними елементами

Статичні цих елементів відомі: *I* –го *z = f(x); II* –го *s = f(z); III* – го *y = f(s).*

Необхідно визначити результуючу статичну характеристику *y = f(x).*

Для графічної побудови статичної характеристики системи, що утворена з послідовно з'єднаних елементів, статичні характеристики яких відомі, необхідно побудувати характеристику першого елементу *I*– в четвертому квадранті координатної площини, характеристику другого елементу *II* – в третьому квадранті, а третього елементу *III* – в другому квадранті (рис.1.14). При такій побудові результуюча статична характеристика *y = f(x)* буде отримана в першому квадранті (якщо побудувати характеристику першого елементу в першому квадранті, другого – в другому, а третього – в третьому, то результуюча статична характеристика *y = f(x)* буде отримана в четвертому квадранті).

Задамося значенням входу в перший елемент x_1 (вхід в систему). За статичною характеристикою елементу I знайдемо вихід елементу – z_1. Для цього відновимо перпендикуляр з точки x_1 до перетину з характеристикою елементу I, як показано на рис.1.14, а потім проведемо лінію, паралельну вісі x, до перетину з віссю z. Таким чином, отримали значення z_1, яке є виходом елементу I і в той же час вхідною величиною елементу II. Аналогічно за значенням z_1 за статичною характеристикою елементу II отримаємо його вихід s_1, який і буде вхідною величиною елементу III. За значенням s_1 за статичною характеристикою елементу III отримаємо його вихід y_1. Це значення і є виходом загальної системи, що отримане при вході x_1. Якщо через точки x_1 і y_1 провести лінії паралельні координатним осям, то на їх перетині отримаємо точку 1 (рис.1.14), яка і буде першою точкою результуючої статичної характеристики $y = f(x)$. Задамося другим значенням входу в перший елемент x_2 і аналогічним чином отримаємо точку 2 (x_2, y_2), яка буде другою точкою результуючої статичної характеристики, потім значенням входу x_3 і т.д. За отриманими точками 1, 2, 3, … побудуємо шукану статичну характеристику загальної системи.

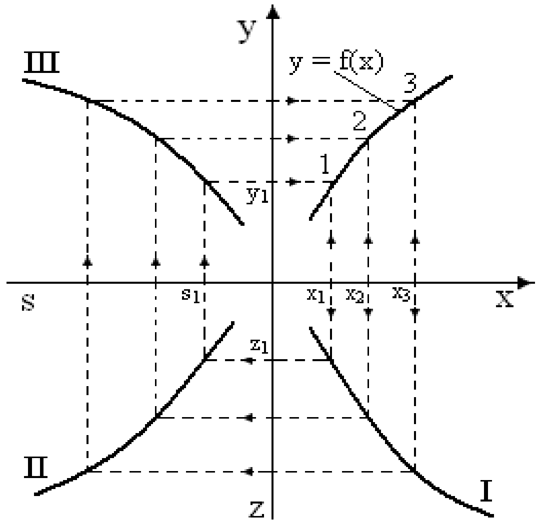


Рис.1.14 Побудова статичної характеристики трьох послідовно з'єднаних елементів

При послідовному з'єднанні більше трьох елементів спочатку проводиться їх комбінація по три елементи. Потім знаходяться загальні характеристики груп по три елементи в кожній. А потім вже за отриманими характеристики груп знаходиться і характеристика всього з'єднання.

При побудові статичної характеристики з'єднання, що складається з двох елементів, характеристику першого елементу слід побудувати в першому квадранті, другого – в другому, а у третьому квадранті проводиться допоміжна лінія з початку координат під кутом 45° до вісі абсцис, що еквівалентно умовному підключенню третьої ланки з коефіцієнтом передачі, рівним одиниці. Побудова виконується аналогічно описаній процедурі і результуюча статична характеристика *y = f(x)* буде отримана в четвертому квадранті. Для того, щоб результуюча статична характеристика *y = f(x)* була отримана в першому квадранті, що є більш зручним, необхідно:

1) для графічної побудови статичної характеристики системи, що утворена з двох послідовно з'єднаних елементів (рис.1.15),

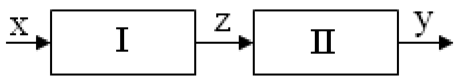


Рис. 1.15 Система з двома послідовно з'єднаними елементами

статичні характеристики яких відомі, необхідно побудувати характеристику першого елементу I – в третьому квадранті координатної площини, характеристику другого елементу II – в другому квадранті (рис.1.16);

2) в третьому квадранті на вісі *x* задатися значенням входу x_1 в систему (це буде також і входом елементу I);

3) за статичною характеристикою елементу I знайдемо вихід елементу – z_1, а за допомогою статичної характеристики елементу II отримаємо вихід y_1 (рис.1.16). Це значення і буде виходом загальної системи, що отримане при вході x_1;

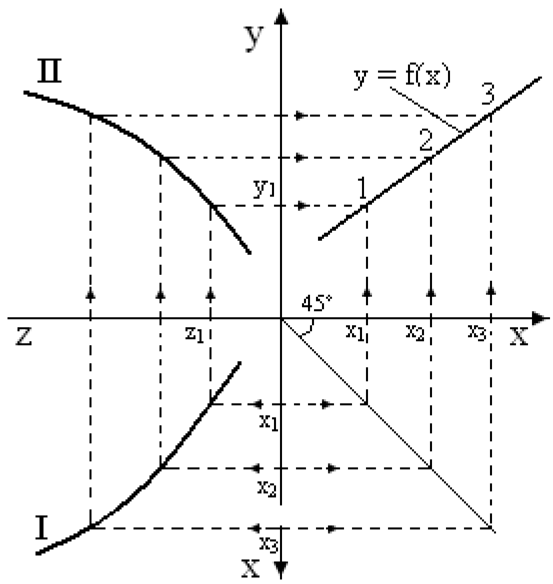


Рис. 1.16 Побудова статичної характеристики двох послідовно з'єднаних елементів

4) за допомогою проведеної допоміжної лінії з початку координат під кутом 45° до вісі абсцис у четвертому квадранті перенесемо значення входу x_1 в перший квадрант;

5) через точки x_1 і y_1 проводимо лінії, паралельні координатним осям, і на їх перетині отримаємо точку 1 (рис.1.16), яка і буде першою точкою результуючої статичної характеристики $y = f(x)$;

6) задамося наступними значеннями входу в перший елемент x_2, x_3 і т.д і аналогічним чином отримаємо точку 2 (x_2, y_2), точку 3 (x_3, y_3) і т.д. і за отриманими точками 1, 2, 3, … побудуємо шукану статичну характеристику загальної системи $y = f(x)$.

Якщо статичні характеристики елементів лінійні (або лінеаризовані), то вони описуються рівняннями вигляду: $y_i = k_i \cdot x_i$, де x_i, y_i, k_i – відповідно вхід, вихід і коефіцієнт передачі i-го елементу. Згідно з розглянутим раніше перетворенням, загальний коефіцієнт передачі системи дорівнюватиме добутку коефіцієнтів передач окремих елементів:

$k = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n = \prod_{1}^{n} k_i$, де n – кількість послідовно з'єднаних елементів.

Тоді результуюча статична характеристик послідовно з'єднаних лінійних елементів буде мати вигляд: $y = k \cdot x$. (1.5)

Примітка. Якщо в системі декілька елементів з'єднані між собою, то більш доцільно лінеаризувати результуючу статичну характеристику, тому що нелінійності окремих елементів можуть у сукупності компенсуватися (як це показано на рис.1.16, де отримана результуюча статична характеристика майже лінійна).

Статична характеристика елементів, що охоплені зворотним зв'язком

Зворотним зв'язком називається такий пристрій, за допомогою якого вихідний сигнал (або його частина) передається на вхід даного елементу (або на один з попередніх елементів). Коли передавана зворотним зв'язком дія залежить тільки від вихідної величини і не залежить від часу, зворотний зв'язок називається жорстким. У системах регулювання за відхиленням, які найчастіше зустрічаються, регулятор, що підключений до об'єкту, утворює від'ємний зворотний зв'язок, оскільки він прагне протидіяти збурюючій дії. Якщо зворотний зв'язок від'ємний, то на суматорі ставиться знак “–”, а при додатному зворотному зв'язку – знак “+”.

Нехай елемент II охоплений від'ємним зворотним зв'язком (рис.1.17). В пристрої зворотного зв'язку знаходиться елемент I.

Статичні характеристики цих елементів відомі: I – го $\mu = f(\varepsilon)$; II – го $\varphi = f(\mu)$. На суматор подається завдання z і вихід елементу II – φ. Оскільки зворотний зв'язок від'ємний, то $\varepsilon = z - \varphi$. Звідси: $z = \varepsilon + \varphi$.

Необхідно визначити результуючу статичну характеристику за каналом «завдання-вихід», тобто $\varphi = f(z)$.

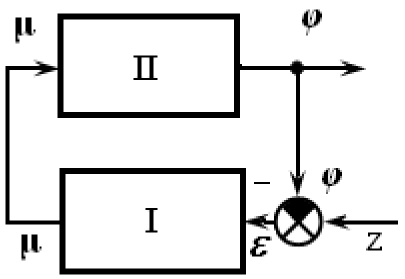


Рис.1.17 Система з від'ємним зворотнім зв'язком

Для графічної побудови статичної характеристики системи, яка утворена з елементу, що охоплений від'ємним зворотним зв'язком, і елементу, що знаходиться в пристрої зворотного зв'язку, статичні характеристики яких відомі, необхідно побудувати характеристику першого елементу I – в третьому квадранті координатної площини, а характеристику другого елементу II – в другому квадранті (рис.1.18). Далі в третьому квадранті на вісі ε слід задатися значенням входу ε_1 елементу I. За статичною характеристикою елементу I знайдемо вихід елементу – μ_1, а потім за допомогою статичною характеристики елементу II отримаємо його вихід φ_1 (рис.1.18). Це значення і буде виходом загальної системи. Тепер необхідно отримати значення вхідної величини z_1, яке відповідне для виходу φ_1. Це значення дорівнює: $z_1 = \varepsilon_1 + \varphi_1$. Для того, щоб на вісі z відкласти відрізок, довжина якого дорівнює $\varepsilon_1 + \varphi_1$ необхідно в четвертому квадранті координатної площини провести промінь під кутом 45° до вісі ординат, як показано на рис.1.18. Точка перетину променя і прямої, що паралельна вісі абсцис $\varphi = \varphi_1$, і буде шуканою першою точкою (***D***) результуючої статичної характеристики $\varphi = f(z)$.

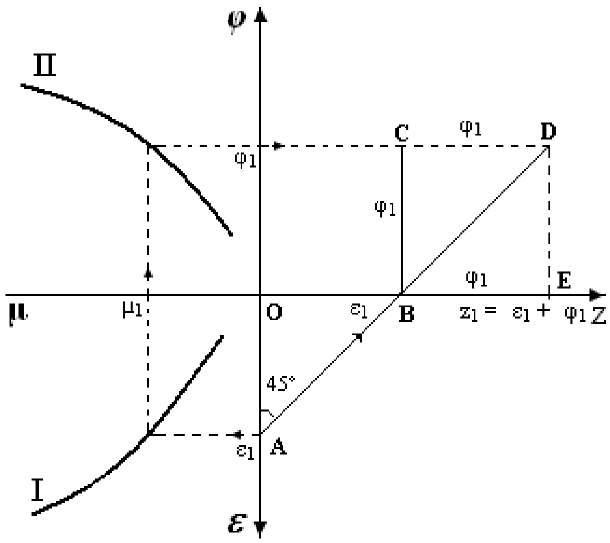


Рис.1.18 Побудова статичної характеристики елементу, що охоплений від'ємним зворотним зв'язком

При цьому, довжина відрізку *OE = OB+BE* дорівнюватиме $\varepsilon_1 + \varphi_1$. Цей висновок витікає з розгляду трикутників *AOB* і *BCD*. З трикутника *AOB* слідує, що довжини відрізків *OA* і *OB* дорівнюють ε_1, бо цей трикутник рівнобічний. З трикутника *BCD* слідує, що довжини відрізків *BC* і *CD* дорівнюють φ_1, бо цей трикутник рівнобічний. Оскільки відрізок *BD* є діагоналлю квадрату *BCDE*, то і довжина відрізку *BE* буде дорівнювати φ_1.

Таким чином, отримана точка *D* з координатами (z_1,φ_1) і є першою точкою шуканої статичної характеристики. Далі отримують інші точки результуючої статичної характеристики при значеннях ε_2, ε_3 і т.д. аналогічно.

При такій побудові результуюча статична характеристика $\varphi = f(z)$ буде отримана в першому квадранті.

Приклад 1.1. Нехай елемент I охоплений від'ємним зворотним зв'язком (рис.1.19). Статична елементу I відома: $\varphi = f(\varepsilon)$. На суматор подається завдання z і вихідна величина – φ. Оскільки зворотний зв'язок негативний, то $\varepsilon = z - \varphi$. Звідси: $z = \varepsilon + \varphi$.

Необхідно визначити результуючу статичну характеристику за каналом «завдання-вихід», тобто $\varphi = f(z)$.

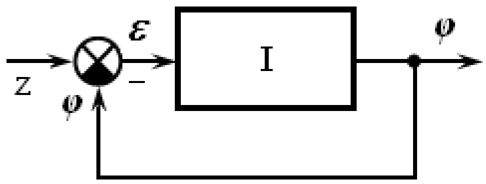


Рис.1.19 Система з від'ємним зворотним зв'язком

Таке завдання можна вирішити за допомогою методу перетворення статичних характеристик зі зворотнім зв'язком, що був розглянутий вище.

При побудові шуканої статичної характеристики з'єднання характеристику першого елементу слід побудувати в другому квадранті, а в третьому квадранті проводиться допоміжна лінія з початку координат під кутом 45° до вісі абсцис, що еквівалентно умовному підключенню в пристрій зворотного зв'язку елементу з коефіцієнтом передачі, рівним одиниці (рис.1.20). А після цього побудова виконується аналогічно вищеописаної процедури і результуюча статична характеристика $\varphi = f(z)$ буде отримана в першому квадранті (точка D з координатами (z_1,φ_1) – перша точка результуючої характеристики).

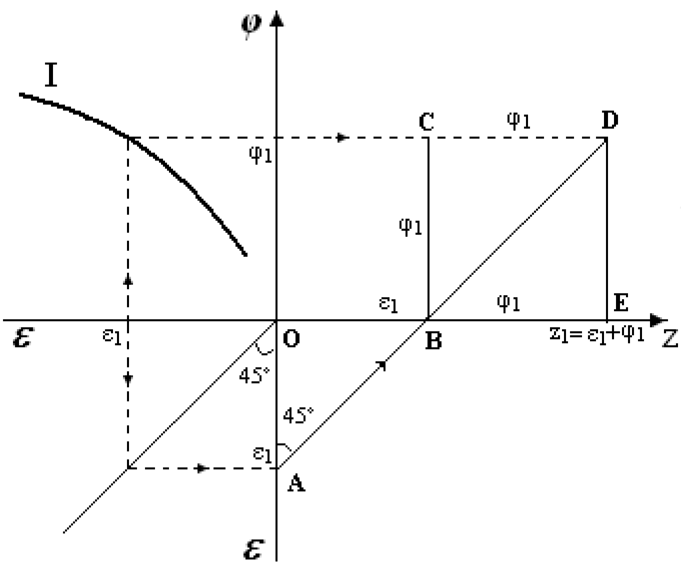


Рис.1.20 Побудова статичної характеристики елементу, що охоплений від'ємним зворотним зв'язком

Розглянуті методи побудови статичних характеристик дозволяють проводити розрахунки і більш складних структурних схем, при розкладанні їх на ланцюжки з послідовно або паралельно включеними елементами або на контури із зворотними зв'язками.

Надалі припускаємо, що властивості системи лінійні, а якщо ні, то проведена її лінеаризація. Статичні характеристики замкнених систем дозволяють оцінити точність роботи системи в сталому режимі, тобто визначити статичну точність регулювання.

Визначення статичних характеристик

При автоматизації виробничих процесів найбільш правильні рішення можуть бути прийняті на підставі даних про статистичні і динамічні властивості об'єктів керування. Для отримання цих даних визначають відповідно статистичні і динамічні характеристики об'єктів керування.

Вивчення статики процесів, тобто одержання їхніх статичних характеристик, може бути зроблено як аналітичним, так і експериментальним шляхом. Також застосовують і комбіновані методи визначення статичних характеристик, які передбачають аналітичне визначення статичних характеристик із подальшим їх уточненням експериментальним шляхом.

1.2. Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

1.3. Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

1.4. Послідовність виконання роботи

1. З згідно зі своїм варіантом отримати у викладача структурну схему системи і графіки статичних характеристик елементів системи, які позначені на структурних схемах, як Р1,…, Р16.

2. Для заданої структурної схеми системи визначити загальну статичну характеристику системи заданої структури (статичні характеристики окремих елементів відомі).
3. Виконати лінеаризацію отриманої статичної характеристики на заданому відрізку ($X_{вх0} \in [4,6]$) в околі робочої точки $X_{вх0}$=5.
4. Продемонструвати розрахунки, побудови викладачу.
5. Оформити протокол лабораторної роботи.

1.5. Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до заздалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додаються необхідні креслення і розрахунки з результатами виконаної роботи.

Контрольні запитання

1. Загальна характеристика усталених режимів роботи системи керування.

2. Поняття статичної характеристики. Типи статичних характеристик.

3. Зв’язок між рівнянням статики та рівнянням динаміки системи керування.

4. Методика побудови статичних характеристик при різних видах з’єднання ланок – послідовне і паралельне з’єднання (статичні характеристики розімкнених систем).

5. Статичні характеристики замкнених систем (елемент охоплений зворотним зв'язком).

6. Графічні методи лінеаризації статичних характеристик.

7.Аналітичний метод лінеаризації статичних характеристик.

8. Які статичні характеристики не піддаються лінеаризації?

9. Як визначається коефіцієнт передачі за статичною характеристикою?

10. Як впливає крутість статичних характеристик на вибір каналу регулюючого впливу?

Лабораторна робота № 2
Моделі динаміки об'єктів керування

Мета та основні завдання: Дослідити процес отримання часової характеристики системи автоматичного керування при відомому математичному описі її динаміки. Набути вмінь розв’язання диференціальних рівнянь за допомогою класичного методу. Набути вмінь розв’язку дифер енціальних рівнянь з використанням операторного методу.

Завдання[2]. Вивчити види динамічних характеристик; типові вхідні впливи при дослідженні систем автоматичного керування. Розглянути вільні і вимушені процеси в лінійній системі керування; вид представлення вільної складової рішення в залежності від коренів характеристичного рівняння і методи визначення констант інтегрування. Розглянути поняття оригінала і зображення функції, використання таблиці відповідностей для переходу з одного класу функцій в іншій. Вивчити зображення за Лапласом похідних. Розглянути застосування операторного методу для отримання рішень рівнянь динаміки.

2.1. Короткі теоретичні відомості

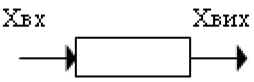
Типові вхідні впливи

Вихідний сигнал динамічного елемента буде по різному відгукуватися на різні сигнали на вході цього елемента. Зовнішні впливи, які діють на систему керування, є досить різноманітними. Тому при дослідженні систем керування використовують типові вхідні сигнали і вивчають реакцію системи на них. При цьому, типові (стандартні) впливи мають суттєві параметри реальних впливів і збурень. Зазвичай в автоматиці до типових вхідних впливів відносять: східчастий (ступінчастий) вхідний сигнал, імпульсний вхідний сигнал, гармонічний вхідний сигнал, лінійно зростаючий сигнал і інші. Найбільшого поширення набули ступінчастий та імпульсний сигнали, що подають на вхід досліджуваного об’єкта. Ступінчастим впливом називають

[2]Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

миттєву зміну вхідної величини від одного постійного значення досліджуваної системи до іншого. Якщо величина вхідних впливів у вигляді сходинки або імпульсу змінилася на логічну одиницю, то такі впливи називають одиничними.

1. Одинична сходинка.

Нехай на вхід системи поступає сигнал $x_{вх}$, а на виході отримуємо сигнал $x_{вих}$ 

.

Одиничну сходинку (одиничний стрибок) позначають 1(t) і також називають функцією Хевісайда. Вхід записується: $x_{вх}$= 1(t). Одинична сходинка (рис.2.1) визначається наступним чином:

$$1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}.$$

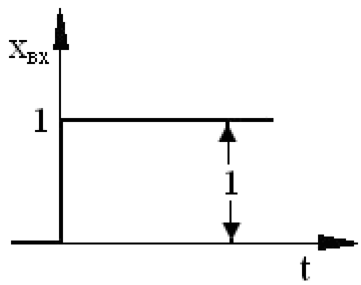


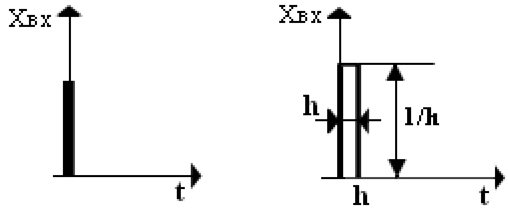
Рис.2.1. Одинична сходинка

Якщо стрибок має амплітуду А, то вхідний вплив може бути записаний через одиничну сходинку: $x_{вх}$= А·1(t).

Реакція САУ на ступеневу функцію (перехідний процес, який виникає у системі в результаті вхідного впливу у вигляді сходинки) називається перехідною характеристикою, перехідним процесом, або перехідною функцією.

2. Одиничний імпульс.

Імпульсним впливом $\delta(t)$ називають нескінченно велике збільшення вхідної величини з миттєвим поверненням її до попереднього значення (рис.2.2-а).



а) б)

Рис.2.2 Одиничний імпульс

Так званий одиничний імпульс *δ(t)*, який ще називають – дельта-функція, функція Дірака, – це функція, що задовольняє наступні умови:

$$d(t)=\begin{cases}0, t\neq 0\\ \infty, t=0\end{cases}\text{ і так, щоб }\int_{-\infty}^{+\infty} d(t)dt=1.$$

Дельта-функцію фізично складно реалізувати. Її можна представити як імпульс нескінченно малої тривалості і нескінченно великої амплітуди, тобто як межа, до якої прагне прямокутний імпульс з основою h, висотою 1/h і площею, що дорівнює одиниці (рис.2.2-б) при умові, що h→0. Одиничний імпульс можна розглядати як похідну за часом від 1(t).

$$\frac{d}{dt}\left[1(t)\right]=d(t).$$

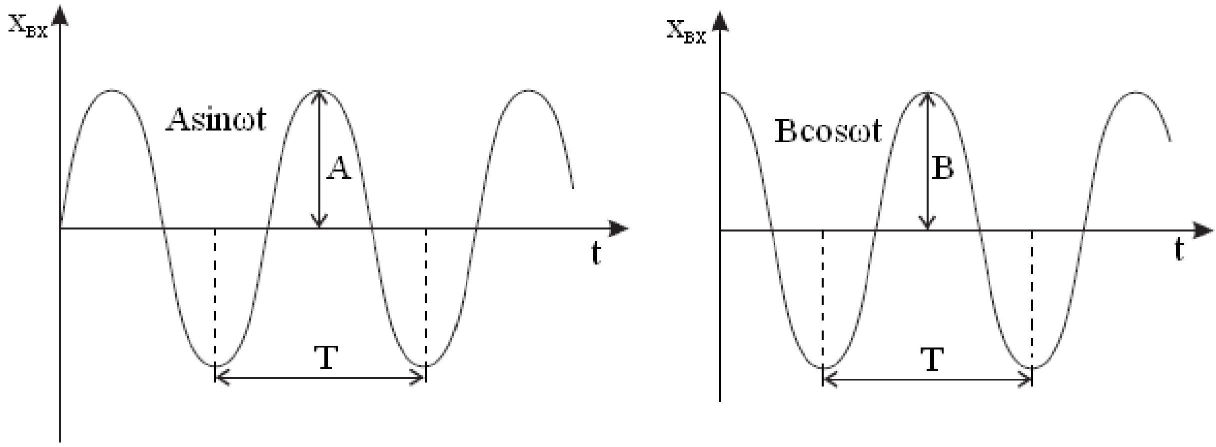
Перехідний процес, який виникає у системі в результаті імпульсного впливу називають імпульсною характеристикою.

3. Гармонічний вхідний сигнал.

Гармонічні сигнали (рис.2.3) $x_{вх}(t)=A\sin\omega t$ і $x_{вх}(t)=B\cos\omega t$ використовується при дослідженні систем автоматичного регулювання частотними методами.

Гармонічні сигнали характеризується такими параметрами: амплітуда – A, B; період – T (частота ω = 2π/T).

Реакцію динамічної системи на гармонічний вплив називають частотною характеристикою.



а) б)

Рис.2.3 Гармонічні впливи

4. Лінійно зростаючий вхідний вплив.

Лінійно зростаючий вхідний вплив (рамповий вплив) наведено на рис.2.4.

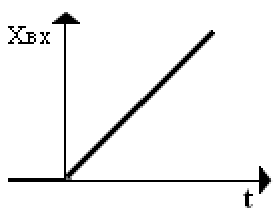


Рис.2.4 Лінійно зростаючий вхідний вплив

Цей вплив задовольняє наступні умови:

$$t \cdot 1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}.$$

При цьому, $t \cdot 1(t) = \int_0^t 1(t) dt$.

Реакцією динамічної системи на лінійно зростаючий вхідний вплив буде рампова характеристика.

Визначення перехідної характеристики класичним методом

Процес регулювання, що протікає в лінійній (або лінеаризованій) системі, може бути визначений шляхом рішення диференціального рівняння даної САУ при відомому вхідному впливі і заданих початкових умовах. Аналітичним виразом перехідної характеристики буде рішення рівняння динаміки, що описує систему.

Більшість динамічних моделей САР, які розглядають, базуються на лінійних або лінеаризованих рівняннях динаміки і являють собою звичайні диференціальні рівняння з правою частиною. Диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами в загальному випадку має вид:

$$\begin{aligned} &a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = \\ &= b_m m^{(m)}(t) + b_{m-1} m^{(m-1)} + \ldots + b_2 m''(t) + b_1 m'(t) + b_0 m(t) \end{aligned}, \qquad (2.1)$$

де $j(t)$ – вихідний параметр; $m(t)$ – вхідний параметр, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ – коефіцієнти рівняння динаміки.

Для вирішення рівняння (2.1) необхідно задати початкові умови, під якими розуміється стан процесу у момент часу, що прийнятий за його початок, тобто $t = 0$:

$$j(o) = j_0; j'(o) = j'_0; j''(o) = j''_0; \ldots; j^{(n-1)}(o) = j_0^{(n-1)}. \qquad (2.2)$$

Зазвичай приймаються нульові початкові умови.

Загальне рішення диференціального рівняння (2.1) представляється у вигляді:

$$j(t) = j_{віл}(t) + j_{вим}(t), \qquad (2.3)$$

де $j_{віл}(t)$ – вільна складова рішення; $j_{вим}(t)$ – вимушена складова рішення

Вільна (або власна) складова $j_{віл}(t)$ визначається як загальне рішення відповідного однорідного диференціального рівняння, яке отримують з (2.1) шляхом прирівнювання нулю правої частини рівняння:

$$a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = 0. \qquad (2.4)$$

Це так званий вільний процес зміни досліджуваної змінної. Вільний процес зміни змінних має місце в системі в тому випадку, якщо її вивести із стану рівноваги зовнішніми впливами, потім ці впливи прибрати, а систему надати самій собі. Очевидно, що для реальних систем вільна складова $j_{віл}(t)$ за відсутності зовнішніх впливів повинна наближатись з часом до нуля. Ця складова існує під час перехідного процесу і в стійких системах з часом зникає, тому її ще називають перехідною складовою або перехідним процесом.

Для визначення загального рішення рівняння (2.4) складається характеристичне рівняння, яке отримують шляхом заміни k–тої похідної на p^k. При цьому сама шукана змінна замінюється на одиницю. З урахуванням цього, отримаємо характеристичне рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \,. \qquad (2.5)$$

Загальне рішення складається з ряду доданків, вид яких визначається тим, які корені будуть отримані при рішенні характеристичного рівняння (2.5): дійсні або комплексні і чи є серед них кратні (рівні між собою) корені.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, то вигляд вільної складової рішення $j_{віл}(t)$ є сумою експонент:

$$j_{віл}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + ... + c_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t} \,, \qquad (2.6)$$

де c_i – константи інтегрування (коефіцієнти); p_i – корені характеристичного рівняння; t – координата поточного часу; n – порядок рівняння динаміки.

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні рівні (кратні), то вигляд вільної складової рішення $j_{віл}(t)$ буде дещо іншим.

При наявності двох однакових коренів характеристичного рівняння $p_1 = p_2$, вільна складова рішення $j_{віл}(t)$ буде мати вигляд:

$$j_{віл}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{p_1 t} \,.$$

При наявності трьох однакових коренів $p_1 = p_2 = p_3$:

$$j_{віл}(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{p_1 t} \,.$$

При наявності m кратних коренів:

$$j_{віл}(t) = (c_1 + c_2 t + ... + c_m t^m) e^{p_1 t} \,. \qquad (2.7)$$

Якщо корені характеристичного рівняння (2.5) будуть комплексними $p_{1,2} = a \pm jw$, то експоненти вільної складової з комплексними коренями за формулою Ейлера зводяться до гармонік, і вигляд вільної складової рішення $j_{віл}(t)$ може бути записаний наступним чином:

$$j_{віл}(t) = e^{a \cdot t}(c_1 \cos wt + c_2 \sin wt). \qquad (2.8)$$

Друга складова загального рішення диференційного рівняння системи керування $j_{вим}(t)$ визначає вимушений рух системи та її поведінку у сталому режимі. Ця складова є частинним рішенням неоднорідного диференціального рівняння (2.1) (з ненульовою правою частиною), і яка при підстановці в ліву частину рівняння (2.1) перетворить його на тотожність. Вимушена складова є значенням вихідної величини, до якої вона наближається при безмежному збільшенні часу. Оскільки вільні рухи при $t \to \infty$, як правило, затухають, то вихідна величина наближається до вимушеної складової $j(t) \to j_{вим}(t)$. Тому вимушена складова називається ще сталою складовою.

Вид частинного рішення визначається як видом дії, так і параметрами та характеристиками системи автоматичного регулювання.

З математики відомо, що вид частинного рішення визначається видом правої частини рівняння (2.1). Тобто вимушена складова збігається за формою з вхідною функцією (вхідним впливом), і її задають по цій функції з точністю до невизначених коефіцієнтів.

Зокрема, якщо права частина $m(t) = 1$– константа, то і частинне рішення шукається у вигляді константи – $j_{вим}(t) = c$. Якщо права частина є гармонійною функцією з визначеними частотою, амплітудою і початковою фазою, то і частинне рішення буде гармонічною функцією тієї ж частоти, для якої потрібно визначити амплітуду і фазу.

Необхідно відзначити, що визначення вимушеної складової в разі дії вхідних впливів складнішої форми, ніж згадані вище, є досить складною задачею.

Тому зазвичай **класичний метод** рішення диференціальних рівнянь застосовується для рішення лінійних диференціальних рівнянь не вище третього порядку (при збільшенні порядку рівняння зростає складність обчислень), а також тоді, коли **права частина рівняння виражається простою функцією** – постійною величиною або гармонічною функцією [2].

Для визначення коефіцієнтів вимушеної складової необхідно підставити цю функцію (наприклад, $j_{вим}(t) = c$) в рівняння динаміки і отримати з нього рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів.

Коефіцієнти вільної складової рішення $j_{віл}(t)$ визначають з урахуванням частинного рішення (визначених коефіцієнтів). При цьому, якщо порядок рівняння динаміки дорівнює n, то і число констант інтегрування і число заданих початкових умов теж дорівнює n. Для визначення констант інтегрування слід знайти n-1 похідних від рішення диференціального рівняння динаміки. Далі слід підставити початкові умови в рішення диференціального рівняння (2.3) і в похідні від нього і отримати систему рівнянь, з якої визначити невідомі константи інтегрування.

З урахуванням знайдених констант інтегрування залежність (2.3) і буде шуканим рішенням рівняння руху системи. Отримане рівняння перехідного процесу є найбільш повною динамічною характеристикою системи.

З розглянутого вище витікає наступна послідовність рішення лінійного диференціального рівняння:

- визначення коренів характеристичного рівняння і знаходження загального рішення (вільної складової);
- відшукання частинного рішення (вимушеної складової);
- визначення коефіцієнтів вимушеної складової;
- визначення констант інтегрування вільної складової шляхом вирішення системи рівнянь, що отримана при підстановці початкових умови в рішення диференціального рівняння і в похідні від нього;
- отримання рівняння перехідного процесу шляхом підстановки знайдених коефіцієнтів в загальне рішення диференціального рівняння (2.3).

<u>Приклад 2.1.</u> Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$$2\varphi'' + 8\varphi' + 6\varphi = 9.1\mu$$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинки $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $j(o)=0$; $j'(o)=0$.

Для побудови перехідної характеристики слід розв'язати рівняння динаміки. Застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь.

Рішення диференціального рівняння будемо шукати у вигляді:

$$j(t) = j_{віл}(t) + j_{вим}(t),$$

де $j_{віл}(t)$ – вільна складова рішення; $j_{вим}(t)$ – вимушена складова рішення.

Для визначення виду вільної складової рішення знайдемо корені характеристичного рівняння:

$$2p^2 + 8p + 6 = 0.$$

В результаті рішення квадратного рівняння отримали корені:

$p_1=-1$, $p_2=-3$. Оскільки корені характеристичного рівняння дійсні та різні, то вільну складову запишемо у вигляді:

$$j_{віл}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}.$$

Вид вимушеної складової рішення визначається видом впливу на вході в систему. Оскільки на вхід системи подається одинична сходинка $\mu(t)=1(t)$, тобто $m(t)=1$ – константа, то і вимушена складова шукається у вигляді константи – $j_{вим}(t)=c_3$.

Тоді вид часової характеристики (одинична сходинка на вході і нульові початкові умови) буде:

$$j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + c_3.$$

Визначимо невідомі коефіцієнти: c_1, c_2, c_3. Спочатку визначимо вимушену складову c_3. Для визначення коефіцієнтів вимушеної складової необхідно підставити цю функцію $j_{вим}(t)=c_3$ в диференціальне рівняння і з урахуванням величини впливу на вході $m(t)=1$, і тоді отримаємо:

$6j_{вим}(t) = 9.1 \cdot m(t) = 9.1 \cdot 1 = 9.1$. Звідки $j_{вим}(t) = 9.1/6 = 1.517$. Тоді $c_3=1.517$.

З урахуванням знайденого c_3 вид перехідної характеристики буде:

$$j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + 1.517.$$

Для визначення констант інтегрування вільної складової c_1 і c_2 необхідно отримати систему двох рівнянь. Для цього продиференціюємо рішення $j(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + 1.517$ і отримаємо:

$$j'(t) = -1 \cdot c_1 e^{-t} - 3 \cdot c_2 e^{-3t}.$$

Далі підставимо початкові умови в рішення диференціального рівняння і в першу похідну від нього:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 1.517 &= 0 \\ -c_1 - 3c_2 &= 0 \end{aligned}.$$

Розв'язавши отриману систему відносно c_1 і c_2, отримаємо:

c1=-2.27; c2=0,758.

Підставивши значення констант інтегрування в загальний розв'язок, отримаємо аналітичний вираз часової характеристики:

$$j(t) = 1{,}517 - 2{,}275e^{-t} + 0{,}758e^{-3t}.$$

Побудувати графік перехідної характеристики можна за допомогою математичних пакетів. Нижче (рис.2.6) показана перехідна характеристика, що отримана за рівнянням $j(t) = 1{,}517 - 2{,}275e^{-t} + 0{,}758e^{-3t}$ в середовищі Excel.

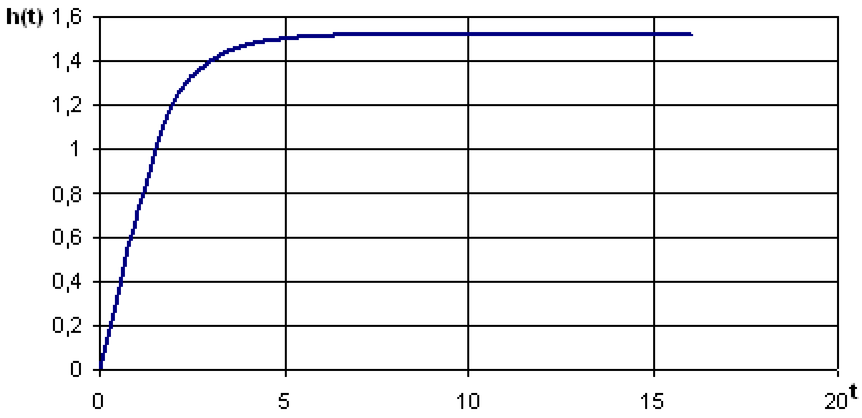


Рис.2.6 Перехідна характеристика

Використання функцій математичного пакета Mathcad при вирішенні диференціального рівняння класичним методом

Приклади рішення диференціальних рівнянь (з дійсними та різними, дійсними та кратними, а також комплексними коренями характеристичного рівняння) в середовищі Mathcad наведені в Додатку Б.

Пошук коренів характеристичного рівняння зручно виконувати за допомогою математичного пакету Mathcad.

Можна використовувати функцію Mathcad ***polyroots***. Функція *polyroots* не потребує початкового наближення і повертає відразу всі корені, як дійсні, так і комплексні.

Формат:

Polyroots(*v*)

Повертає корені поліному степені ***n***. Коефіцієнти поліному знаходяться в векторі ***v*** довжини ***n* + 1**. Повертає вектор довжини ***n***, що складається и коренів полінома.

де ***v*** **-** вектор, що складається з коефіцієнтів полінома.

Приклад використання функції *polyroots* для характеристичного рівняння

$$2.3p^3 + 3.8p^2 + 5.1p + 2.8 = 0\,.$$

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$f(p) := 2.3\cdot p^3 + 3.8\cdot p^2 + 5.1\cdot p + 2.8$$

$$v := \begin{pmatrix} 2.8 \\ 5.1 \\ 3.8 \\ 2.3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.793 \\ -0.43 + 1.162i \\ -0.43 - 1.162i \end{pmatrix}$$

Аналогічний результат можна отримати і за допомогою функції solve, що знаходиться на панелі інструментів **Символьные**.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$2.3\cdot p^3 + 3.8\cdot p^2 + 5.1\cdot p + 2.8 \ \mathrm{solve}, p \ \rightarrow \begin{pmatrix} -0.79252176150263081918 \\ -0.42982607577042372085 + 1.1624748648968480429i \\ -0.42982607577042372085 - 1.1624748648968480429i \end{pmatrix}$$

У **додатку Б** наведений лістинг Mathcad, де корені характеристичного рівняння знаходять за допомогою директиви Given і функції Find. Це теж дуже зручний варіант рішення. Там же показано приклад застосування цих функцій для рішення систем, що потрібно для визначення констант інтегрування.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

Перетворення Лапласа

Аналітичне рішення диференціальних рівнянь, що описують динаміку системи керування, особливо високого порядку, зазвичай пов'язане з певними математичними труднощами. Для полегшення таких задач використовують спеціальні перетворення (наприклад, Лапласа). Операція перетворення диференціального рівняння полягає в переході від функції з незалежною змінною t (час) до функції з комплексною змінною p (p=α+jω). Це дає можливість замінити операцію диференціювання (інтегрування) більш простою операцією множення (ділення) і перейти від диференціальних рівнянь до алгебраїчних.

Пряме перетворення Лапласа – це перехід від функції з дійсною змінною t до функції комплексної змінної p. Цей перехід здійснюється за допомогою інтеграла Лапласа:

$$L[f(t)] = \int_0^t f(t)\cdot e^{-p\cdot t}dt = \overline{f}(p), \tag{2.9}$$

де $f(t)$ – оригінал функції; $\bar{f}(p)$ – зображення функції; L – оператор Лапласа. При цьому функція ***f(t)*** має бути неперервною або кусочно-неперервною функцією від t. На функцію $f(t)$ накладається наступна умова:

$f(t)=0$ при $t<0$.

Символічний запис цієї операції має вигляд:

$$\overline{f}(p) = L[f(t)]. \tag{2.10}$$

Перехід від зображення до оригіналу називають зворотнім перетворенням по Лапласу і виконують за формулою:

$$L^{-1}\left[\bar{f}(p)\right]=\frac{1}{2p\cdot j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\bar{f}(p)\cdot e^{pt}dp=f(t), \tag{2.11}$$

де c – абсциса збіжності функції $\bar{f}(p)$; L^{-1} – зворотній оператор Лапласа. Абсциса збіжності визначається з наступних умов:

– існують такі додатні числа M і c, які не залежать від t і, при цьому, виконується наступна нерівність $|f(t)|<Me^{ct}$ для усіх $0\le t\le\infty$;

– абсцису збіжності c визначає мінімальне значення c, при якому виконується ця нерівність.

Знаходження інтеграла (2.11) зазвичай викликає великі труднощі.

Символічний запис цієї операції має вигляд:

$$f(t)=L^{-1}\left[\bar{f}(p)\right]. \tag{2.12}$$

Основні властивості перетворення Лапласа

Властивість лінійності перетворень

Сума оригіналів відповідає сумі їх зображень. Для будь-яких констант a і b: $L[a\cdot f(t)+b\cdot y(t)]=a\cdot L[f(t)]+b\cdot L[y(t)]=a\cdot\overline{f}(p)+b\cdot\overline{y}(p)$.

В загальному вигляді: сумі оригіналів $\sum_{i-1}^{n}a_i\cdot f_i(t)$ відповідає сума зображень $\sum_{i-1}^{n}a_i\cdot\overline{f_i}(p)$.

Зсув в дійсній області

Зсуву на час τ в області оригіналу відповідає множення зображення на e^{-pt}: $L[f(t-t)]=e^{-pt}\cdot\overline{f}(p)$.

Інтегрування оригіналу при нульових початкових умовах

Інтегруванню оригінала відповідає ділення його зображення на p:

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{\overline{f}(p)}{p}.$$

Диференціювання оригінала при нульових початкових умовах

Диференціюванню оригінала відповідає множення його зображення на p: $L[f'(t)]=p\cdot\overline{f}(p)$. В загальному випадку: $L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^n\cdot\overline{f}(p)$.

Диференціювання оригінала при не нульових початкових умовах

При не нульових початкових умовах зображення похідних від оригіналу знаходять за формулами:

перша похідна: $L[f'(t)] = p \cdot \overline{f}(p) - f_0$;

друга похідна: $L[f''(t)] = p^2 \cdot \overline{f}(p) - pf_0 - f_0'$;

похідна m порядку: $L\left[f^{(m)}(t)\right] = p^m \cdot \overline{f}(p) - \sum_{i=0}^{m-1} p^i \cdot f_0^{(m-i-1)}$.

Для основних функцій, що найчастіше зустрічаються в практиці дослідження систем автоматичного керування складені таблиці відповідності між оригіналами і зображеннями. Вони приведені в таблиці 2.1. Якщо ж потрібна функція відсутня в таблиці, то її зображення можна знайти за формулою прямого перетворення Лапласа (2.9).

Таблиця 2.1 Зображення основних функцій за Лапласом

№	оригінал $f(t)$	зображення $\bar{f}(p)$	№	оригінал $f(t)$	зображення $\bar{f}(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	13	$\sin(wt)$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
2	c	$\frac{c}{p}$	14	$\cos(wt)$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	15	$t\sin(wt)$	$\frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$
4	t^2	$\frac{2!}{p^3}$	16	$t\cos(wt)$	$\frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2}$
5	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	17	$e^{-bt}\sin(wt)$	$\frac{w}{(p+b)^2+w^2}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	18	$e^{bt}\sin(wt)$	$\frac{w}{(p-b)^2+w^2}$
7	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	19	$e^{-bt}\cos(wt)$	$\frac{p+b}{(p+b)^2+w^2}$
8	$\frac{A_R \cdot t^{R-1}}{(R-1)!}e^{p_1 t}$	$\frac{A_R}{(p-p_1)^R}$	20	$e^{bt}\cos(wt)$	$\frac{p-b}{(p-b)^2+w^2}$
9	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	21	$sh(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
10	$t^2 \cdot e^{-at}$	$\frac{2!}{(p+a)^3}$	22	$ch(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
11	$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	23	$1(t-t)$	$\frac{1}{p}e^{-pt}$
12	$d(t)$	1			

Рішення рівнянь динаміки з використанням операторного методу

Вирішення диференціального рівняння в цьому випадку складається з наступних етапів:

1. Перетворення диференціального рівняння до операторної форми.

2. Рішення операторного рівняння відносно вихідної величини в області комплексної змінної р,

3. Перехід в область дійсного змінного шляхом зворотного перетворення Лапласа (з використанням таблиці відповідності).

Нехай диференціальне рівняння має вид:

$$\begin{aligned} &a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j(t) = \\ &= b_m m^{(m)}(t) + b_{m-1} m^{(m-1)} + \ldots + b_2 m''(t) + b_1 m'(t) + b_0 m(t) \end{aligned}, \qquad (2.13)$$

де $j(t)$ – вихідний параметр; $m(t)$ – вхідний параметр, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ – коефіцієнти рівняння динаміки.

Зазвичай приймаються нульові початкові умови.

$$j(o) = 0; j'(o) = 0; j''(o) = 0; \ldots; j^{(n-1)}(o) = 0 \,. \qquad (2.14)$$

Виконаємо перетворення диференціального рівняння по Лапласу (отримаємо рівняння в операторній формі):

$$\begin{aligned} &a_n p^n \overline{j}(p) + a_{n-1} p^{n-1} \overline{j}(p) + \ldots + a_2 p^2 \overline{j}(p) + a_1 p \overline{j}(p) + a_0 \overline{j}(p) = \\ &= b_m p^m \overline{m}(p) + b_{m-1} p^{m-1} \overline{m}(p) + \ldots + b_2 p^2 \overline{m}(p) + b_1 p \overline{m}(p) + b_0 \overline{m}(p) \end{aligned}$$

і

виконаємо найпростіші перетворення:

$$\begin{aligned} &(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) \overline{j}(p) = \\ &= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p b_0) \overline{m}(p) \end{aligned}.$$

Вирішимо отримане рівняння в операторної формі, що є алгебраїчним, відносно вихідної змінної:

$$\overline{\varphi}(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \cdot \overline{\mu}(p) \,. \qquad (2.15)$$

При отримання перехідної характеристики вхідний вплив є одиничною сходинкою $f(t) = 1(t)$, зображення якої $L[1(t)] = \frac{1}{p}$.

З урахуванням $\overline{m}(p) = \frac{1}{p}$ рівняння (2.15) можна записати:

$$\bar{\varphi}(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+...+b_2 p^2+b_1 p+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_2 p^2+a_1 p+a_0}\cdot\frac{1}{p}. \tag{2.16}$$

Перехідну функцію φ(t) можна отримати за допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$\varphi(t)=L^{-1}[\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+...+b_2 p^2+b_1 p+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_2 p^2+a_1 p+a_0}\cdot\frac{1}{p}] . \tag{2.17}$$

Зворотне перетворення за Лапласом складного виразу (2.17), який відсутній у таблиці відповідностей операторного методу, потребує використання методів спрощення виразу шляхом представлення правої його частини у вигляді суми простих доданків. Ці перетворення потребують досить значних витрат часу. Розглянемо їх.

Нехай зображення вихідної величини має вигляд:

$$\bar{j}=\frac{N(p)}{M(p)}\bar{m}=\frac{N(p)}{pM(p)}, \tag{2.18}$$

де $M(p)=a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}...+a_2 p^2+a_1 p+1$,

$N(p)=b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}...+b_2 p^2+b_1 p+1$ – поліноми. При чому m<n і коефіцієнти a_i, b_i – дійсні числа.

Знайдемо корені рівняння *M(p)=0* (знаменник передавальної функції): $p_1, p_2,\dots, p_n$.

Запишемо:

$$M(p)=a_n p^n+a_{n-1}p^{n-1}+...+a_2 p^2+a_1 p+1=a_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n).$$

При цьому можливі наступні випадки.

1. Корені характеристичного рівняння дійсні різні.

Для виконання зворотного перетворення за Лапласом вираз (2.18) представимо у вигляді:

$$\frac{N(p)}{pM(p)}=\frac{N(p)}{pa_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)}=\frac{A_0}{p}+\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_2}+ \cdots+\frac{Ai}{p-p_i}+\cdots+\frac{A_n}{p-p_n},$$

де $A_0, A_1, \dots, A_n$ – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Кожен з цих доданків (зображення) згідно таблиці відповідностей операторного методу легко перетворюється до оригіналу:

$$L^{-1}[\frac{A_0}{p}] = A_0,\ L^{-1}[\frac{A_1}{p-p_1}] = A_1 e^{p_1 t}, \ldots, L^{-1}[\frac{A_i}{p-p_i}] = A_1 e^{p_i t}.$$

Для визначення коефіцієнтів A_0, A_1, …, A_n виконується почергове множення рівняння (2.19):

$$\frac{N(p)}{pa_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{Ai}{p-p_i} + \cdots + \frac{A_n}{p-p_n} \quad (2.19)$$

на знаменники правої частини (наприклад, на $(p-p_1)$) з наступним визначенням отриманого рівняння при $p = p_1$.

Тоді:

$$\frac{N(p)}{pa_n(p-p_2)...(p-p_n)} = \frac{A_0(p-p_1)}{p} + A_1 + \frac{A_2(p-p_1)}{p-p_2} + \cdots + \frac{Ai(p-p_1)}{p-p_i} + \cdots + \frac{A_n(p-p_1)}{p-p_n}$$

Звідси при $p = p_1$:

$$A_1 = \frac{N(p_1)}{p_1 a_n(p_1-p_2)...(p_1-p_n)}.$$

Аналогічно знаходимо A_i при $p = p_i$:

$$A_i = \frac{N(p_i)}{p_i a_n(p_i-p_1)...(p_i-p_{i-1})(p_i-p_{i+1})...(p_i-p_n)}.$$

Для визначення коефіцієнта A_0 виконується множення рівняння (2.19) на p, а потім рішення рівняння при $p = 0$:

$$A_0 = \frac{N(p)}{a_n(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_n)} \text{при}(\ p=0).$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні рівні (кратні).

Нехай характеристичне рівняння має R кратних коренів $p = p_1$. Тоді права частина матиме вигляд:

$$\frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{A_0}{p} + \frac{A_R}{(p-p_1)^R} + \frac{A_{R-1}}{(p-p_1)^{R-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(p-p_1)^2} + \frac{A_1}{(p-p_1)^1} + \cdots + \frac{A_n}{p-p_n}.$$

Кожен з доданків (зображення) згідно таблиці відповідностей операторного методу легко перетворюється до оригіналу:

$$L^{-1}[\frac{A_0}{p}] = A_0,\ L^{-1}[\frac{A_R}{(p-p_1)^R}] = \frac{A_R \cdot t^{R-1}}{(R-1)!}e^{p_1 t}, \ldots, L^{-1}[\frac{A_n}{p-p_n}] = A_1 e^{p_{ni}t}.$$

Знаходження A_0, A_R виконується розглянутим вище способом. Для визначення інших коефіцієнтів необхідно вираз з найбільш високим степенем знаменника перенести вліво, привести до загального знаменника та скоротити загальні множники чисельника і знаменника. Після цього звичайним способом визначається черговий коефіцієнт. І так за аналогією, доки не буде визначено коефіцієнт A_1.

3. Корені характеристичного рівняння комплексні спряжені.

При комплексних спряжених коренях характеристичного рівняння зворотне перетворення за Лапласом виконується аналогічно описаному вище способу. При цьому, корені і коефіцієнти будуть комплексними спряженими числами. З урахуванням цього і при застосуванні формули Ейлера:

$e^{(a \pm jw)} = e^a(\cos wt \pm j\sin wt)$ будуть отримані дійсні вирази.

<u>Приклад 2.2.</u> Визначити перехідну характеристику системи автоматичного керування, яка описується наступним диференціальним рівнянням:

$$2j'' + 10j' + 8j = 7m$$

при подачі на її вхід одиничної сходинки при нульових початкових умовах:

$$j(o) = 0; j'(o) = 0.$$

Виконаємо перетворення диференціального рівняння за Лапласом:

$$2p^2\overline{j}(p) + 10p\overline{j}(p) + 8\overline{j}(p) = 7\overline{m}(p).$$

Тоді $(2p^2 + 10p + 8)\overline{j}(p) = 7\overline{m}(p)$.

Розв'яжемо отримане рівняння в операторної формі відносно вихідної змінної:

$\overline{j} = \frac{N(p)}{M(p)}\overline{m} = \frac{7}{(2p^2 + 10p + 8)}\overline{m}$ і при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинки $\overline{m} = 1/p$, отримаємо:

$\overline{j} = \frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{7}{p(2p^2 + 10p + 8)}$. Для рішення застосуємо операторний метод.

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^2+10p+8=0$ і знайдемо його корені:

$p_1=-1$; $p_2=-4$. Тоді:

$$\bar{j}=\frac{7}{p(2p^2+10p+8)}=\frac{7}{2p(p+1)(p+4)}=\frac{A_0}{p}+\frac{A_1}{(p+1)}+\frac{A_2}{(p+4)}.$$

Знайдемо коефіцієнти A_0, A_1, A_2 згідно методики, описаної вище:

$A_0=\dfrac{7}{2(p+1)(p+4)}$ при p = 0. Звідси A_0 = 0,875.

$A_1=\dfrac{7}{2p(p+4)}$ при p = –1. Звідси A_1 = –1,167.

$A_2=\dfrac{7}{2p(p+1)}$ при p = –4. Звідси A_2 = 0,292.

Зображення вихідної величини матиме вигляд:

$$\bar{j}=\frac{0{,}875}{p}-\frac{1{,}167}{p+1}+\frac{0{,}292}{p+4}.$$

Виконавши зворотне перетворення за Лапласом, отримаємо перехідну характеристику:

$$j(t)=0{,}875-1{,}167\cdot e^{-t}+0{,}292\cdot e^{-4t}.$$

Побудувати графік перехідної характеристики можна за допомогою математичних пакетів. Нижче (рис. 2.7) показана перехідна характеристика, що отримана за рівнянням $j(t)=0{,}875-1{,}167\cdot e^{-t}+0{,}292\cdot e^{-4t}$ в середовищі Excel.

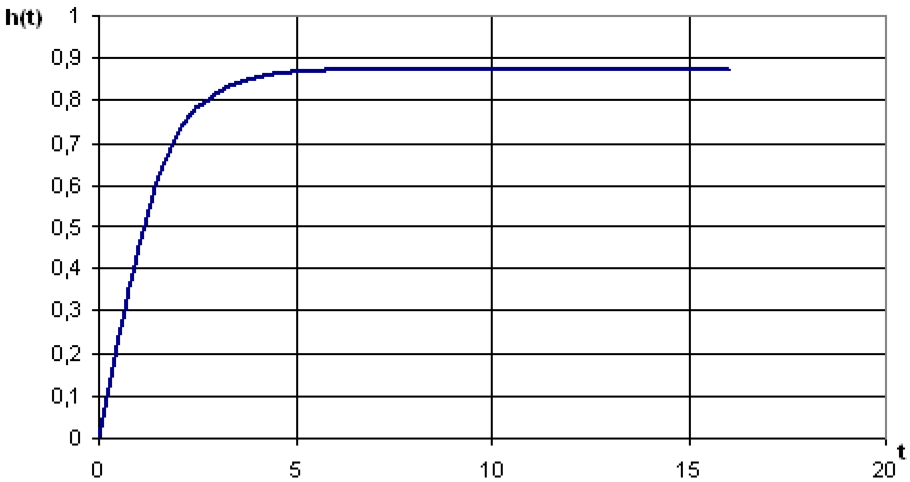


Рис. 2.7 Перехідна характеристика

Використання функцій математичного пакета Mathcad при вирішенні диференціального рівняння операторним методом

Пряме перетворення Лапласа здійснюється за допомогою функції **laplace,** а зворотне – функцією **invlaplace**. Ці функції знаходяться на панелі інструментів **Символьные**.

В Mathcad є спеціальний символьний оператор convert, parfrac, що призначений для розкладання на елементарні дроби виразу, що зазвичай представляє собою відношення поліномів. Уводиться він натисканням кнопки **parfrac** на панелі інструментів **Символьные**. В лівому маркері слід прописати вираз, що підлягає розкладанню, а в правому – змінну, виходячи з якої повинно проводитись розкладання.

Застосування цього оператору дає можливість суттєво спростити процедуру визначення коефіцієнтів розкладання виразу зображення вихідної величини при представленні його у вигляді суми простих дробів.

<u>Приклад 2.3.</u> Виконаємо розкладання на елементарні дроби виразу вихідної величини, що наведений в прикладі 2.1:

$\bar{J} = \dfrac{7}{p(2p^2+10p+8)} = \dfrac{7}{2p(p+1)(p+4)} = \dfrac{A_0}{p} + \dfrac{A_1}{(p+1)} + \dfrac{A_2}{(p+4)}$, де потім визначали коефіцієнти A_0, A_1, A_2. Знайдені коефіцієнти мали значення: A_0 = 0,875; A_1 = –1,167; A_2 = 0,292.

Виконаємо цю процедуру в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$\frac{7}{2\cdot p\cdot(p+1)\cdot(p+4)} \text{ parfrac } \rightarrow \frac{7}{8\cdot p} - \frac{7}{6\cdot(p+1)} + \frac{7}{24\cdot(p+4)}.$$

Як видно з лістингу, результати розрахунку ті ж самі: 7/8 = 0,875; -7/6 = –1,167; 7/24 = 0,292.

Такий же результат дають розрахунки в Mathcad без визначення коренів характеристичного рівняння:

$$\frac{7}{p\cdot\left(2\cdot p^2 + 10\cdot p + 8\right)} \text{ parfrac } \rightarrow \frac{7}{8\cdot p} - \frac{7}{6\cdot(p+1)} + \frac{7}{24\cdot(p+4)}$$

При використанні функції **invlaplace** для зворотного перетворення за Лапласом при отриманні аналітичного виразу перехідного процесу краще зворотне перетворення виконувати після представлення виразу вихідної величини у вигляді суми простих дробів. Це дозволить Mathcad представити результат в оптимальній формі.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$\left[\frac{7}{8\cdot p}-\frac{7}{6\cdot(p+1)}+\frac{7}{24\cdot(p+4)}\right] \text{invlaplace}, p \;\rightarrow\; \frac{7\cdot e^{-4\cdot t}}{24}-\frac{7\cdot e^{-t}}{6}+\frac{7}{8}.$$

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

2.2. Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп’ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

2.3. Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

2.4. Послідовність виконання роботи

<u>Класичний метод.</u>

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання визначити вид перехідної характеристики, що відповідає заданому рівнянню динаміки.
2. Визначити константи інтегрування.
3. Використовуючи отримане рівняння, побудувати шукану перехідну характеристику (наприклад, з використанням MS Excel або запрограмувати рішення заданого рівняння динаміки в середовищі Mathcad).
4. Продемонструвати розрахунки, побудови і роботу програми викладачу.

<u>Операторний метод</u>

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати перетворення за Лапласом заданого рівняння динаміки.
2. Отримати зображення вихідної величини.
3. Виконати необхідні перетворення зображення для переходу до функції часу.
4. Визначити вид перехідної характеристики, яка відповідає заданому рівнянню динаміки.
5. Використовуючи отримане рівняння, побудувати шукану перехідну характеристику (наприклад, з використанням MS Excel або запрограмувати рішення заданого рівняння динаміки в середовищі Mathcad).
6. Продемонструвати розрахунки, побудови і роботу програми викладачу.

2.5. Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до заздалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додаються роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

- розрахунки та побудови у середовищі MS Excel (або лістинг програми з результатами розрахунків).

Контрольні запитання

1. Типовий вплив одинична сходинка (графічне представлення і математичний опис).
2. Типовий вплив одиничний імпульс (графічне представлення і математичний опис).
3. Зв'язок між одиничним імпульсом і одиничною сходинкою.
4. Типовий вплив лінійно зростаючий вхідний вплив (графічне представлення і математичний опис).
5. Зв'язок між лінійно зростаючим вхідним впливом і одиничною сходинкою.
6. Типовий вплив гармонічний вхідний сигнал (графічне представлення і математичний опис).

7. Реакція динамічної системи на різні види типових (стандартних) впливів.
8. Вільна складова рішення диференціального рівняння і її фізичний сенс.
9. Вимушена складова рішення диференціального рівняння і її фізичний сенс.
10. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при різних дійсних коренях характеристичного рівняння.
11. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при кратних дійсних коренях характеристичного рівняння.
12. Вид вільної складової рішення диференціального рівняння при комплексних коренях характеристичного рівняння.
13. Визначення невідомих коефіцієнтів вільної складової рішення диференціального рівняння.
14. Визначення невідомих коефіцієнтів вимушеної складової рішення диференціального рівняння.
15. Зображення за Лапласом похідних при нульових початкових умовах.
16. Зображення за Лапласом похідних при не нульових початкових умовах.
17. Зображення за Лапласом при запізненні (зсуві на час τ) в області оригіналу.
18. Етапи вирішення диференціального рівняння операторним методом.
19. Сенс таблиці відповідності між оригіналами і зображеннями.
20. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння дійсні рівні, при представленні його у вигляді суми простих дробів.
21. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні, при представленні його у вигляді суми простих дробів.
22. Як визначаються коефіцієнти розкладання виразу зображення вихідної величини, якщо корені характеристичного рівняння комплексні спряжені, при представленні його у вигляді суми простих дробів.

Лабораторна робота № 3
Алгебраїчні критерії стійкості

Мета та основні завдання: Дослідити процес визначення стійкості системи автоматичного керування за допомогою алгебраїчних критеріїв стійкості. Набути вмінь визначення стійкості системи керування з використанням наступних критеріїв стійкості: кореневого критерію і критерію Гурвиця.

Завдання[3]. Вивчити поняття стійкості системи керування. Розглянути поняття: стійкої і нестійкої систем; системи, що знаходиться на межі стійкості. Вивчити оцінку стійкості системи керування за допомогою коренів характеристичного рівняння системи, а також з використанням алгебраїчного критерію стійкості Гурвиця. Вивчити мнемонічне правило побудови визначника Гурвиця n -го порядку. Розглянути умови стійкості простих системи керування.

3.1. Короткі теоретичні відомості

Стійкість лінійних систем

Прийняття рішення щодо стійкості системи автоматичного керування є одним з найважливіших питань аналізу динамічних систем керування. Система автоматичного керування повинна стійко працювати при впливі на неї різноманітних завад, шумів і сторонніх впливів. Під стійкістю системи автоматичного керування розуміють здатність системи повертатися до сталого режиму після зникнення зовнішніх сил, які вивели її з такого стану.

Нехай досліджувана система знаходиться в усталеному стані (на її входи не подаються жодні впливи й змінні системи, що характеризують її стан не змінюються в часі). Подамо на вхід системи деяке обмежене збурення (збурення не повинно бути занадто великим, щоб система не була зруйнована і не повинно бути таким малим, щоб система не відчула його).

---

[3] Відповіді на зазначені теоретичні питання занести в протокол при підготовці до виконання лабораторної роботи.

Під дією цього збурення стан системи починає змінюватись (система відреагувала на збурення). Збурення діє на систему протягом скінченного проміжку часу і потім усувається (система стає вільною від збурення). При цьому, система може повести себе відповідно до одного з можливих випадків:

- система не може відновити попередній усталений режим після порушення його збуренням і буде віддалятись від нього все далі – це нестійка система (перехідний процес при цьому буде незбіжним);
- система повернеться через деякий час у свій попередній усталений режим – це стійка система (перехідний процес при цьому буде збіжним);
- система прийде в усталений режим, який буде відрізнятись від попереднього, або отримає додатково до заданого руху ще і сталий періодичний рух, що являє собою незатухаючі коливання – цю систему вважають нейтральною, або такою, що знаходиться на межі стійкості (перехідний процес при цьому буде аперіодичним або коливальним незатухаючим).

Як в стійкій, так і в нестійкій системах перехідний процес може носити аперіодичний або коливальний характер.

Отже, вище розглянуто фізичний аспект стійкості, тобто здатність системи при відсутності збурень повертатись у свій попередній усталений режим. Розглянемо математичну сторону цієї проблеми. В математичному плані усталений режим – це нульові початкові умови, оскільки в усталеному режимі усі похідні за часом дорівнюють нулю, до того ж відлік змінних ведеться від цього ж таки усталеного режиму. Але в результаті дії збурення стан системи починає змінюватись, і на момент усунення збурення він буде відрізнятися від нульового (усталеного). Цей стан можна розглядати як початковий (починаючи з моменту усунення збурення). Ці початкові умови вже не будуть нульовими.

Проаналізуємо поведінку системи при не нульових початкових умовах $y(0) \neq 0$ ($y(0) = y_0$). За положення рівноваги візьмемо сталий стан системи $y = y_{cm}$. Тоді:

– система (або рух системи відносно положення рівноваги $y_{cm} = 0$) називається стійкою, якщо з часом (при $t \to \infty$) вона повертається в стан рівноваги (рис.3.1) тобто:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0. \qquad (3.1)$$

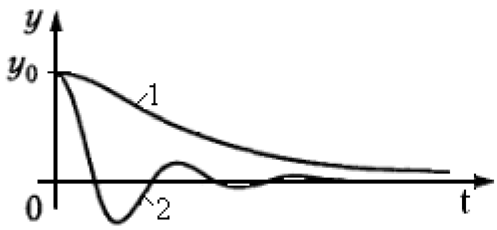


Рис. 4.1. Аперіодичний (1) і коливальний (2) перехідні процеси в стійкій системі

– система називається нейтрально стійкою, якщо для будь-яких значень $t > 0$ вона залишається в деякому околі положення рівноваги (рис.4.2), тобто знайдеться таке число $e > 0$, що для будь-яких значень $t > 0$ виконується умова:

$$|y(t)| < e\ . \qquad (4.2)$$

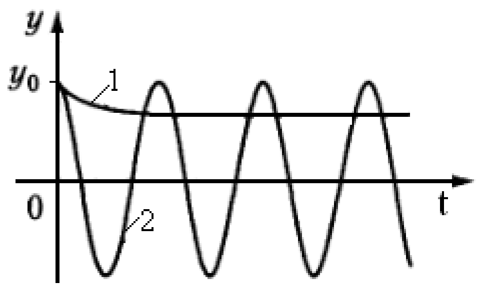


Рис.4.2. Аперіодичний (1) і коливальний (2) перехідні процеси в нейтральній (нейтрально стійкій) системі

– система (або рух системи відносно положення рівноваги $y_{cm} = 0$) називається нестійкою, якщо з часом вона залишає любий наперед заданий ε-окіл положення рівноваги (рис.4.3), тобто для будь-яких $e > 0$ знайдеться таке значення $t_{cm} > 0$, що при $t > t_{cm}$ має місце:

$$|y(t)| > e\ . \qquad (4.3)$$

Для більшості аперіодичних перехідних процесів нестійкий рух характеризується нескінченним зростанням модуля вихідної змінної, а для коливальних перехідних процесів – зростанням амплітуди.

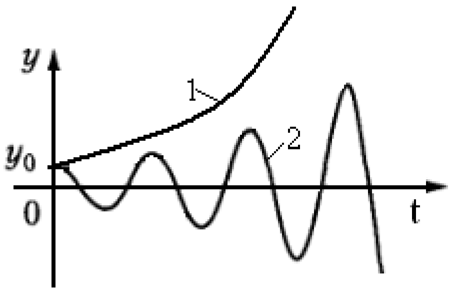
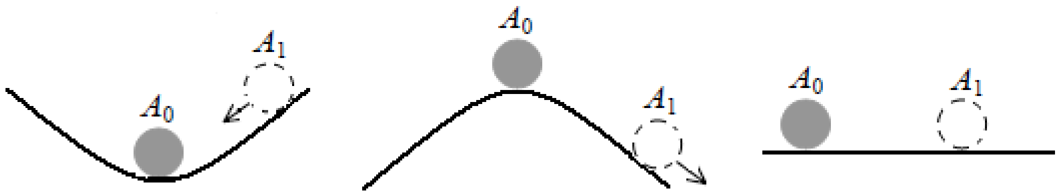


Рис.4.3. Аперіодичний (1) і коливальний (2) перехідні процеси в нестійкій системі

Поняття стійкості наглядно ілюструється на рис.4.4. Положення кулі характеризується точкою A_0. При відхиленні кулі від положення A_0 в положення A_1 під впливом зовнішніх сил куля наближається до положення рівноваги A_0 на рис.4.4–а (стійка система), віддаляється від положення рівноваги A_0 на рис.4.4–б (нестійка система) і займає нове положення рис.4.4–в (нейтральна система).



а) б) в)

Рис.4.4. До визначення стійкості: стійка система (а), нестійка система (б) і нейтральна система (в)

Кореневий критерій стійкості

Як було показано вище, в загальному випадку лінійна система описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$\begin{gathered} a_n j^{(n)}(t)+a_{n-1} j^{(n-1)}(t)+\ldots+a_2 j''(t)+a_1 j'(t)+a_0 j(t)= \\ =b_m m^{(m)}(t)+b_{m-1} m^{(m-1)}+\ldots+b_2 m''(t)+b_1 m'(t)+b_0 m(t) \end{gathered}, \qquad (4.4)$$

де $j(t)$ – вихідний параметр; $m(t)$– вхідний параметр, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m$ – коефіцієнти.

Відповідно до класичного методу, загальне рішення диференціального рівняння (4.4) має вигляд:

$$j\,(t) = j_{\text{віл}}(t) + j_{\text{вим}}(t)\,, \qquad (4.5)$$

де $j_{\text{віл}}(t)$ – вільна складова рішення; $j_{\text{вим}}(t)$ – вимушена складова рішення.

Відповідно до наведеного вище фізичного визначення стійкості, стійкість системи залежить тільки від характеру вільного руху системи. Вільний рух лінійної або лінеаризованої системи описується однорідним диференціальним рівнянням з нульовою правою частиною:

$$a_n j^{(n)}(t) + a_{n-1} j^{(n-1)}(t) + \ldots + a_2 j''(t) + a_1 j'(t) + a_0 j\,(t) = 0 \qquad (4.6)$$

з початковими умовами (не нульовими):

$$j\,(o) = j_0;\, j'(o) = j'_0;\, j''(o) = j''_0; \ldots; j^{(n-1)}(o) = j_0^{(n-1)}\,, \qquad (4.7)$$

тобто, коли всі зовнішні збурення усунені і стан системи визначається лише власною структурою.

Вимушена складова, що залежить від вигляду зовнішнього впливу і правої частини диференціального рівняння, на стійкість системи не впливає.

Таким чином, система буде стійкою, якщо вільна складова $j_{\text{віл}}(t)$ перехідного процесу з часом буде дорівнювати нулю, тобто: $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi_{\text{віл}}(t) = 0$.

Розв’язок диференціального рівняння (4.6) визначається коренями характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0\,. \qquad (4.8)$$

Загальне рішення складається з ряду доданків, вид яких визначається тим, які корені будуть отримані при рішенні характеристичного рівняння (4.8): дійсні або комплексні і чи є серед них кратні корені.

Коефіцієнти у виразах для складових загального рішення визначаються початковими умовами і мають кінцеве значення, оскільки при визначенні стійкості системи обговорювалось, що збурення, яке діє на систему обмежене і кінцеве (діє на систему на протязі скінченного проміжку часу і потім усувається).

Якщо корені характеристичного рівняння дійсні різні, то вигляд вільної складової рішення $j_{віл}(t)$ є сумою експонент:

$$j_{віл}(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + ... + c_n e^{p_n t} = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i t} , \qquad (4.9)$$

де c_i – константи інтегрування (коефіцієнти); p_i– корені характеристичного рівняння; t – координата поточного часу; n – порядок рівняння динаміки.

Кожному дійсному кореню p_i в рішенні (4.9) відповідає доданок вигляду:

$$c_i e^{p_i t} . \qquad (4.10)$$

Якщо $p_i < 0$, то при $t \to \infty$ доданок (4.10) буде наближатись до нуля $c_i e^{p_i t} \to 0$. Якщо $p_i > 0$, то при $t \to \infty$ доданок (4.10) буде необмежено зростати $c_i e^{p_i t} \to \infty$. Якщо $p_i = 0$, то при $t \to \infty$ доданок (4.10) буде мати постійне значення $c_i e^{p_i t} \to c_i = const$.

Якщо корені характеристичного рівняння рівні (кратні), то вигляд вільної складової рішення $j_{віл}(t)$ (при наявності m кратних коренів) буде: $j_{віл}(t) = (c_1 + c_2 t + ... + c_m t^m) e^{p_1 t}$.

Складова рішення типу $(c_1 + c_2 t + ... + c_m t^m) e^{p_1 t}$ при $t \to \infty$ та $p_1 < 0.$ буде давати невизначеність типу $(\infty \cdot 0)$, яку можна перетворити на невизначеність типу (∞ / ∞), при переносі $e^{p_1 t}$ в знаменник. За правилом Лопіталя ця невизначеність при $p_1 < 0$ буде дорівнювати нулю.

Таким чином, якщо всі корені характеристичного рівняння дійсні і від'ємні, то всі доданки рішення будуть дорівнювати нулю при $t \to \infty$, а, отже, і їх сума.

Якщо корені характеристичного рівняння (4.8) будуть комплексними $p_{1,2} = a \pm jw$, вільна складова для однієї пари комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння записується:

$$j_{віл}(t) = e^{a \cdot t} (c_1 \cos wt + c_2 \sin wt). \qquad (4.11)$$

Якщо $a < 0$, то при $t \to \infty$ вільна складова (4.11) буде наближатись до нуля і являти собою затухаючі коливання з частотою ω. Якщо $a > 0$, то при $t \to \infty$ вільна складова (4.11) буде необмежено зростати і являти собою коливання з частотою ω і зі зростаючою амплітудою.

Таким чином, вільна складова рішення для пари комплексно-спряжених коренів буде затухати (наближатись до нуля) при $a < 0$. Те ж буде відбуватися і у випадку довільної кратності комплексної пари.

Якщо $a = 0$, то корені характеристичного рівняння (4.8) будуть уявними $p_{1,2} = \pm jw$ і вільна складова матиме вигляд:

$$j_{віл}(t) = (c_1 \cos wt + c_2 \sin wt). \qquad (4.12)$$

Складова, що відповідає спряженій парі уявних коренів ($a = 0$) – не затухає ніколи і являє собою незатухаючі коливання з частотою ω. Те ж буде відбуватися і у випадку довільної кратності уявної пари.

На підставі проведеного аналізу можна сформулювати загальну умову стійкості: для того, щоб система була стійкою, необхідно й достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння системи були від'ємними або мали від'ємну дійсну частину.

Іншими словами, для стійкості системи необхідно, щоб усі корені характеристичного рівняння системи були розташовані в лівій частині від уявної вісі на комплексній площині (рис.4.5).

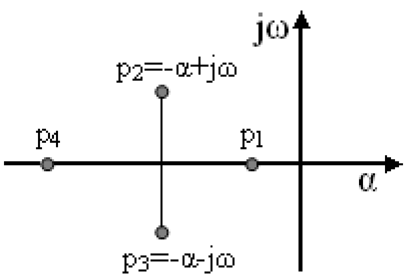


Рис. 4.5.Геометрична інтерпретація стійкої системи

<u>Приклад 4.1.</u> Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$4j''' + 6j'' + 11j' + j = 3m .$$

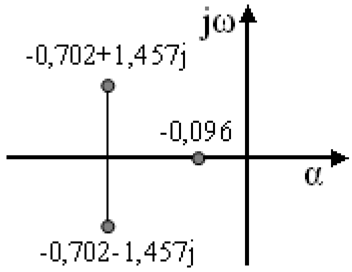
Запишемо характеристичне рівняння: $4p^3 + 6p^2 + 11p + 1 = 0$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння: p_1*=-0,702-1,457j*;

p_2*=-0,702+1,457j;* p_3*=-0,096.*

Оскільки всі корені характеристичного рівняння системи від’ємні (мають від’ємну дійсну частину), то можна зробити висновок, що система стійка.

Можна нанести отримані значення коренів на комплексну площину і переконатися, що вони знаходяться в лівій напівплощині.



Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

$$f(p) := 4\cdot p^3 + 6p^2 + 11\cdot p + 1$$

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.702 - 1.457i \\ -0.702 + 1.457i \\ -0.096 \end{pmatrix}$$

<u>Приклад 4.2.</u> Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$8.4j''' + 1.6j'' + 3.8j' + 2j = 6.3m .$$

Запишемо характеристичне рівняння: $8.4p^3 + 1.6p^2 + 3.8p + 2 = 0$.

Знайдемо корені характеристичного рівняння: p_3*=-0,429;* p_2*=0,119-0,735j;* p_3*=0,119+0,735j.*

Оскільки серед коренів характеристичного рівняння системи є корені, що мають додатну дійсну частину, то можна зробити висновок, що система нестійка.

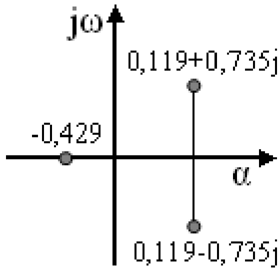
Фрагмент лістингу ***Mathcad*** наведений нижче:

$$f(p) := 8.4 \cdot p^3 + 1.6p^2 + 3.8 \cdot p + 2$$

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 3.8 \\ 1.6 \\ 8.4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.429 \\ 0.119 + 0.735i \\ 0.119 - 0.735i \end{pmatrix}$$

Якщо нанести отримані значення коренів на комплексну площину, то можна переконатися, що не всі корені характеристичного рівняння знаходяться в лівій напівплощині.



Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії стійкості дозволяють за коефіцієнтами характеристичного рівняння без визначення коренів рівняння зробити висновок про стійкість системи. Англійський математик Раус і німецький математик Гурвиць (працюючи в Швейцарії), незалежно один від одного і в різних формах вивели нерівності, дотримання яких є необхідною і достатньою умовою стійкості систем будь-якого порядку.

Критерій Гурвиця

Найпоширенішим в інженерній практиці є критерій Гурвиця завдяки своїй простоті. Він заснований на побудові спеціальних визначників Гурвиця з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 .$$

Критерій формулюється наступним чином: для того, щоб система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб при $a_n > 0$ усі визначники Гурвиця були строго додатними (a_n – старший коефіцієнт).

Формування головного визначника Гурвиця для системи n – го порядку наступне:

1) по головній діагоналі зліва направо починаючи з a_{n-1} послідовно у порядку зменшення індексів виписуємо коефіцієнти характеристичного рівняння до a_0 (всього n коефіцієнтів);

2) стовпці вверх від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами характеристичного рівняння з послідовно спадаючими індексами, а вниз – коефіцієнтами з послідовно зростаючими індексами;

3) на місце коефіцієнтів з індексами менше нуля або більше n проставляють нулі.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} > 0 \qquad (4.13)$$

Примітка. Іноді для формування головного визначника Гурвиця користуються наступним алгоритмом:

1) в першому рядку визначника виписують коефіцієнти характеристичного рівняння зі спадаючими індексами (крок зміни індексу - 2 починаючи з a_{n-1} (тобто $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5} \ldots$); всього заповнюється n елементів рядка (n стовпців); на місце коефіцієнтів, яких не вистачає, проставляють нулі;

2) вниз від першого рядка визначника стовпці визначника заповнюють коефіцієнтами з послідовно зростаючими індексами; нижче коефіцієнта a_n проставляють нулі.

Іншими визначниками Гурвиця є діагональні мінори головного визначника Гурвиця:

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{і т.д.}$$

Розглянемо стійкість систем першого, другого і третього порядку з використанням критерію Гурвиця:

- система першого порядку (n=1). Характеристичне рівняння системи має вигляд: $a_1 p + a_0 = 0$. Найстарший коефіцієнт $a_1 > 0$, а визначник Гурвиця має вигляд: $\Delta_1 = |a_0|$. Таким чином, умови стійкості наступні: $a_1 > 0$; $a_0 > 0$.
- система другого порядку (n=2). Характеристичне рівняння системи має вигляд: $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Найстарший коефіцієнт $a_2 > 0$, а визначники Гурвиця мають вигляд:

$$\Delta_1 = |a_1|;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0.$$

Таким чином, умови стійкості наступні: $a_2 > 0; a_1 > 0$; $a_0 > 0$.

- система третього порядку (n=3). Характеристичне рівняння системи має вигляд: $a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$. Найстарший коефіцієнт $a_3 > 0$, а визначники Гурвиця мають вигляд:

$$\Delta_1 = |a_2|;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2.$$

Таким чином, умови стійкості наступні: $a_3 > 0; a_2 > 0; a_1 > 0;$ $a_0 > 0$ і $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Продовжуючи процес дослідження стійкості системи при подальшому збільшенні *n*, можна переконатись, що необхідною умовою стійкості є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння (при $a_n > 0$).

Критерій Гурвиця застосовують при $n \leq 4$. При великих порядках зростає число визначників, і процес стає трудомістким. Недолік критерію Гурвиця – мала наочність. Критерій зручний для реалізації на ЕОМ.

Примітка. Якщо необхідно виконати дослідження стійкості системи при $a_n < 0$, необхідно спочатку помножити ліву і праву частини рівняння на (-1).

Використання функцій математичного пакета Mathcad при визначенні стійкості системи з використанням кореневого критерію і критерію Гурвиця

При визначенні стійкості системи з використанням кореневого критерію необхідно визначати корені характеристичного рівняння.

Визначення коренів характеристичного рівняння в математичному пакеті ***Mathcad*** розглянуто в лабораторній роботі 2.

При визначенні стійкості системи з використанням критерію Гурвиця необхідно вміти знаходити визначники Гурвиця.

У ***Mathcad*** є можливість обчислювати визначник будь-якої матриці і з будь-якою заданою точністю обчислень. Визначник матриці обчислюється за допомогою оператора "|A|", де *A* – задана в завданні матриця.

Наприклад, операція обчислення визначника в Mathcad запишеться у вигляді двох операцій, а саме, завдання матриці *A* і виведення її визначника:

$$A1 := \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A1| = -412$$

Ці операції знаходяться на панелі інструментів **Матриця**.

Приклад 4.3. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$4j''' + 6j'' + 11j' + j = 3m .$$

Запишемо характеристичне рівняння: $4p^3 + 6p^2 + 11p + 1 = 0$.

Побудуємо визначники Гурвиця і виконаємо їх обчислення в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

ORIDGIN := 1

Знаходження визначників Гурвиця:

$D1 := (6) \qquad |D1| = 6$

$$D2 := \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \qquad |D2| = 62$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad |D3| = 62$$

Як видно з наведених розрахунків, усі визначники Гурвиця є додатними. Таким чином, система стійка.

Приклад 4.4. Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$8.4j''' + 1.6j'' + 3.8j' + 2j = 6.3m .$$

Запишемо характеристичне рівняння: $8.4p^3 + 1.6p^2 + 3.8p + 2 = 0$.

Побудуємо визначники Гурвиця і виконаємо їх обчислення в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Як видно з наведених розрахунків, не всі визначники Гурвиця є додатними. Таким чином, система нестійка.

ORIDGIN := 1

Знаходження визначників Гурвиця:

$D1 := (1.6) \quad |D1| = 1.6$

$$D2 := \begin{pmatrix} 1.6 & 2 \\ 8.4 & 3.8 \end{pmatrix} \quad |D2| = -10.72$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 1.6 & 2 & 0 \\ 8.4 & 3.8 & 0 \\ 0 & 1.6 & 2 \end{pmatrix} \quad |D3| = -21.44$$

<u>Приклад 4.5.</u> Визначити стійкість системи автоматичного керування, поведінка якої описується диференціальним рівнянням вигляду:

$$2j^{(4)} + 3j''' + 14j'' + 3j' + 2j = 9.1m\,.$$

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^4 + 3p^3 + 14p^2 + 3p + 2 = 0$.

Побудуємо визначники Гурвиця і виконаємо їх обчислення в середовищі Mathcad.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

ORIDGIN := 1

Знаходження визначників Гурвиця:

$D1 := (3) \quad |D1| = 3$

$$D2 := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \quad |D2| = 36$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 14 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad |D3| = 90$$

$$D4 := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 14 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 2 \end{pmatrix} \quad |D4| = 180$$

Як видно з наведених розрахунків, усі визначники Гурвиця є додатними. Таким чином, система стійка.

З метою більш поглибленого вивчення теоретичних основ даної лабораторної роботи рекомендується використати конспект лекцій з курсу та список рекомендованої літератури до даних методичних вказівок.

3.2. Опис лабораторних засобів та обладнання

Лабораторна робота виконується на персональному комп'ютері стандарту IBM PC під керуванням операційної системи MS Windows зі стандартним пакетом MS Office та математичним пакетом Mathcad.

3.3. Заходи безпеки під час виконання лабораторної роботи

Заходи безпеки, яких треба дотримуватись при виконанні даної лабораторної роботи, наведені у додатку А.

3.4. Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до отриманого варіанту завдання виконати оцінку стійкості заданих систем автоматичного керування з використанням наступних критеріїв стійкості: кореневого критерію і критерію Гурвиця.
2. При використанні кореневого критерію: отримати характеристичне рівняння системи, знайти корені характеристичного рівняння і за ними виконати оцінку стійкості системи.
3. При використанні критерію Гурвиця: записати необхідні визначники Гурвиця, обчислити їх і за отриманими результатами виконати оцінку стійкості системи.
4. Запрограмувати рішення характеристичного рівняння і обчислення визначників Гурвиця в середовищі Mathcad.
5. Продемонструвати розрахунки і роботу програми викладачу.
6. Оформити протокол лабораторної роботи.

3.5. Обробка та аналіз результатів. Оформлення звіту

При оформленні звіту з лабораторної роботи до заздалегідь підготовленого протоколу (див. завдання до лабораторної роботи) додаються роздруковані аркуші з результатами виконаної роботи:

– лістинг програми з результатами розрахунків.

Контрольні запитання

1. Поняття нестійкої системи.
2. Поняття стійкої системи.
3. Поняття нейтральної системи (такої, що знаходиться на межі стійкості).
4. За якою складовою рішення диференціального рівняння аналізують стійкість системи і чому?
5. При яких дійсних коренях характеристичного рівняння система буде стійкою?
6. При яких комплексно-спряжених коренях характеристичного рівняння система буде стійкою?
7. При яких коренях характеристичного рівняння система буде знаходитись на межі стійкості?
8. При яких коренях характеристичного рівняння система буде нестійкою?
9. Як на комплексній площині розташовуються корені характеристичного рівняння стійкої системи?
10. Як за критерієм Гурвиця визначається стійкість системи?
11. Алгоритм формування головного визначника Гурвиця.
12. При яких коефіцієнтах характеристичного рівняння система першого порядку буде стійкою?
13. При яких коефіцієнтах характеристичного рівняння система другого порядку буде стійкою?

Додаток А

Заходи безпеки під час виконання лабораторних робіт

Цикл лабораторних робіт з дисципліни «АВТОМАТИЗОВАНІ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ В ХІМІЧНИХ ВИРОБНИЦТВАХ» виконуються в комп'ютерному класі кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету, де розміщені персональні комп'ютери. Обладнання живиться електричним струмом напругою 220 В. Тому при виконанні лабораторних робіт слід дотримуватися заходів безпеки наступних інструкцій.

ІНСТРУКЦІЯ

з техніки безпеки при навчанні студентів на ПЕОМ в учбових лабораторіях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету

1. Знання і суворе дотримання цих правил є обов'язковим для всіх осіб, допущених до роботи на ПЕОМ. Доведення їх до кожного зі студентів підтверджується особистим підписом кожного з них у контрольному листі з техніки безпеки. Особи, які не одержали такого інструктажу та не поставили підпис у контрольному листі з техніки безпеки, до роботи на ПЕОМ не допускаються.
2. Всі роботи в учбових лабораторіях кафедри кібернетики ХТП проводяться лише з дозволу викладача або співробітника кафедри.
3. Під час проведення занять в учбовій лабораторії не повинні знаходитися сторонні особи, в тому числі студенти інших груп. Студенти не повинні самовільно залишати учбову лабораторію під час занять.
4. При роботі на ПЕОМ треба пам'ятати, що в них використовується напруга, небезпечна для життя.
5. Всі особи, працюючі в учбових лабораторіях кафедри КХТП повинні бути ознайомлені з правилами надання першої медичної допомоги при ураженні електричним струмом.
6. Перед вмиканням ПЕОМ кожен з працюючих повинен отримати дозвіл викладача або співробітника кафедри.
7. У випадках виникнення короткого замикання, горіння, диму, вогню в апаратурі, пристрій необхідно негайно вимкнути з мережі та повідомити викладача або співробітника кафедри. Самостійні дії по усуненню пошкодження забороняються.
8. У випадку виходу з ладу обладнання або програмного забезпечення, що зумовлені іншими причинами, доповісти викладачеві або співробітникові кафедри. Вимикати апаратуру при цьому не дозволяється. Самостійні дії по усуненню пошкодження забороняються.

9. Працюючі в учбових лабораторіях кафедри кібернетики ХТП несуть майнову та адміністративну відповідальність за збереження та використання обладнання, наданого для їх праці.
10. Категорично забороняється:
    - самостійно вмикати та вимикати тумблери на щитку електроживлення;
    - несанкціоновано вмикати електрообладнання;
    - приносити та вмикати своє обладнання та пристрої, встановлювати власне програмне забезпечення;
    - залишати без нагляду увімкнені пристрої та лабораторію;
    - пересувати обладнання та комплектуючі;
    - підключати та відключати інформаційні кабелі та кабелі живлення;
    - використовувати власні носії інформації без дозволу викладачів або співробітників кафедри;
    - знаходитись в учбовій лабораторії у верхньому одязі.
11. Після закінчення занять обладнання не вимикається. Робоче місце має бути прибране працюючим та перевірене викладачем чи співробітником кафедри.

ІНСТРУКЦІЯ

із заходів пожежної безпеки у лабораторіях, учбових та робочих приміщеннях кафедри кібернетики хіміко-технологічних процесів хіміко-технологічного факультету

1. Всі студенти повинні знати та ретельно виконувати «Загальні правила пожежної безпеки в НТУУ «КПІ».
2. Завідуючий кафедрою та завідуючий лабораторією відповідають за забезпечення пожежної безпеки всіх приміщень кафедри та за справність протипожежного обладнання та сигналізації.
3. Все електричне обладнання, яке знаходиться в лабораторіях та приміщеннях кафедри, повинно мати заземлення.
4. В усіх приміщеннях необхідно дотримуватись чистоти, не займати приміщення непотрібними меблями, обладнанням та матеріалами.
5. Всі двері основних та додаткових виходів повинні вільно відкриватись.
6. Зберігання та використання горючих та легкоспалахуючих рідин у приміщеннях кафедри забороняється.
7. Ремонт електричного обладнання проводити у строгій відповідності з правилами пожежної безпеки.
8. Всі електрозахисти повинні знаходитися у закритому стані та бути вільними для доступу.
9. Коридори, проходи, тамбури, евакуаційні виходи та підходи до першочергових засобів пожежогасіння, а також комунікаційні ніші повинні бути постійно вільними, чистими та нічим не зайнятими.
10. Відповідальні особи перед закриттям приміщень повинні ретельно оглянути їх, забезпечити прибирання виробничих відходів, перевірити якість перекриття води, газу, відключити напругу електромережі, перевірити стан пожежної сигналізації та засобів пожежогасіння.
11. Від усіх приміщень необхідно мати два комплекти ключів. Один комплект здавати черговому, а інший - зберігати в певному місці, яке відомо обслуговуючому персоналу.
12. Студенти повинні знати та ретельно виконувати «Загальні правила техніки безпеки в НТУУ «КПІ», про що вони ставлять свій підпис у відповідному контрольному листі з техніки безпеки перед початком проведення циклу лабораторних робіт. Студенти, які не пройшли інструктаж і не поставили підпис у контрольному листі , до роботи не допускаються.

Додаток Б

Розв'язання диференціальних рівнянь класичним методом в середовищі Mathcad

Приклад Б.1.

Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$20j'' + 9j' + j = 3m$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинки $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $\varphi(o) = 0$; $\varphi'(o) = 0$.

Для рішення застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь і всі розрахунки виконаємо в математичному пакеті Mathcad.

Лістинг розрахунків і побудов в середовищі Mathcad наведений нижче.

$\mathrm{ORIGIN} \equiv 1$

Корені характеристичного рівняння дійсні різні

Рівняння динаміки САР:

$20\varphi'' + 9\varphi' + \varphi = 3\mu$ (1)

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

Given

$20p^2 + 9p + 1 = 0$

$\mathrm{Find}(p) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

Записуємо вид вільної складової рішення:

$\varphi_{віл} = C1\,e^{-0.25t} + C2\,e^{-0.2t}$

Визначення вимушеної складової:

Вимушена складова дорівнює константі $\varphi_{вим} = C_3$

$\varphi'' := 0 \quad \varphi' := 0 \quad \mu := 1$

Given

$20\varphi'' + 9\varphi' + \varphi = 3\mu$

$C3 := \mathrm{Find}(\varphi) \rightarrow 3$

$C3 = 3$

Загальний вид часової характеристики:

$\varphi(t) = C1\,e^{-0.25t} + C2\,e^{-0.2t} + C3$ (2)

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння *(2)*:

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння *(2)*:

$$\frac{d}{dt}\left(C1\, e^{-0.25t} + C2\, e^{-0.2t} + C3\right) \rightarrow -0.25\cdot C1\cdot e^{-0.25\cdot t} + -0.2\cdot C2\cdot e^{-0.2\cdot t}$$

$$\varphi'(t) = -0.2\cdot e^{-0.2\cdot t}\cdot C2 + -0.25\cdot e^{-0.25\cdot t}\cdot C1 \qquad (3)$$

Підставляємо $t=0$ в рівняння *(2)* та *(3)* та складаємо систему рівнянь:

$t := 0$

Given

$$C1\, e^{-0.25t} + C2\, e^{-0.2t} + C3 = 0$$

$$-0.2\cdot e^{-0.2\cdot t}\cdot C2 + -0.25\cdot e^{-0.25\cdot t}\cdot C1 = 0$$

Визначаємо з отриманої системи C_2 і C_3:

$$koef := Find(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} 12.0 \\ -15.0 \end{pmatrix}$$

Отже

$C1 := koef_1 = 12$

$C2 := koef_2 = -15$

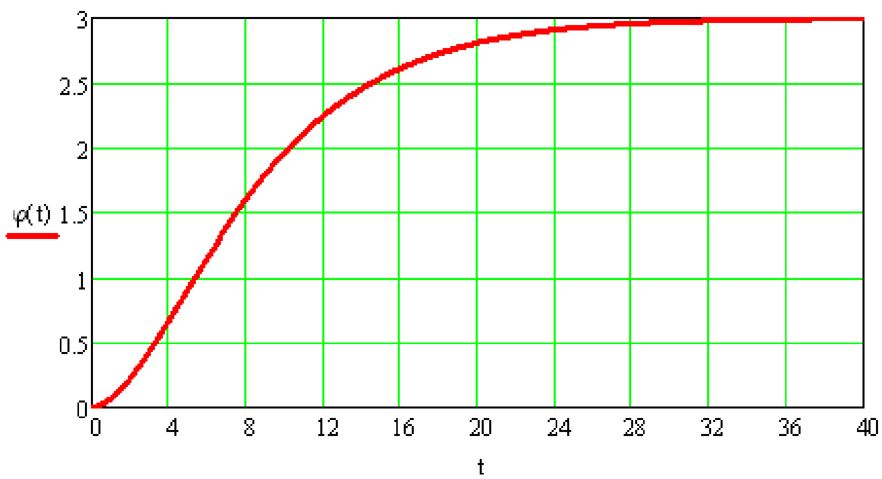
$C3 = 3$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння *(2)* та отримаємо вид часової характеристики:

$$\varphi(t) := 12e^{-0.25\cdot t} - 15e^{-0.2\cdot t} + 3$$

$t := 0, 0.1 .. 40$ Задамо діапазон зміни часової координати

Будуємо часову характеристику:



Приклад Б.2.

Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$0.7j'' + 1.4j' + 0.7j = 3.1m$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинки $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $\varphi(o)=0$; $\varphi'(o)=0$.

Для рішення застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь і всі розрахунки виконаємо в математичному пакеті Mathcad.

Лістинг розрахунків і побудов в середовищі Mathcad наведений нижче.

$ORIGIN \equiv 1$

Корені характеристичного рівняння кратні:

Рівняння динаміки САР:

$0.7\varphi'' + 1.4\varphi' + 0.7\varphi = 3.1\mu$ (1)

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

Given

$0.7p^2 + 1.4p + 0.7 = 0$

$Find(p) \rightarrow (-1.0 \ \ -1.0)$

$\varphi_{віл} = (C1 + C2\,t)e^{-1t}$

Визначення вимушеної складової:

Вимушена складова дорівнює константі $\varphi_{вим} = C_3$

$\varphi'' := 0 \quad \varphi' := 0 \quad \mu := 1$

Given

$0.7\varphi'' + 1.4\varphi' + 0.7\varphi = 3.1\mu$

$C3 := Find(\varphi) \rightarrow 4.4285714285714285714$

$C3 = 4.429$

Загальний вид часової характеристики:

$\varphi(t) = (C1 + C2\,t)e^{-1t} + C3$ (2)

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння *(2)*:

$\frac{d}{dt}\left[(C1 + C2\cdot t)e^{-1t} + C3\right] \rightarrow C2\cdot e^{-t} - e^{-t}\cdot(C1 + t\cdot C2)$

$\varphi'(t) = C2\cdot e^{-t} - e^{-t}\cdot(C1 + t\cdot C2)$ (3)

Підставляємо $t=0$ в рівняння *(2)* та *(3)* та складаємо систему рівнянь:

$t := 0$

Підставляємо *t=0* в рівняння *(2)* та *(3)* та складаємо систему рівнянь:

$t := 0$

Given

$(C1 + C2\,t)e^{-1t} + 4.429 = 0$

$e^{-t}\cdot C2 - \left(e^{-t}\right)\cdot(C1 + t\cdot C2) = 0$

$koef := Find(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} -4.429 \\ -4.429 \end{pmatrix}$

Отже

$C1 := koef_1 = -4.429$

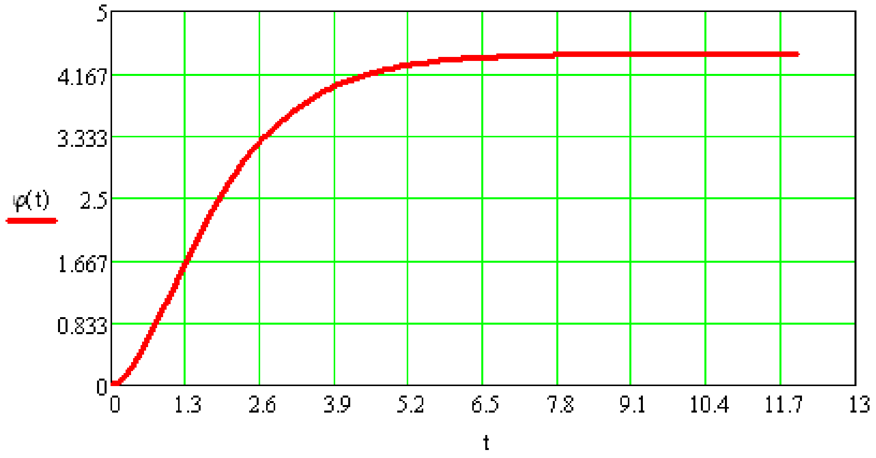
$C2 := koef_2 = -4.429$

$C3 = 4.429$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння *(2)* та отримаємо розв'язок часової характеристики:

$\varphi(t) := \left[(-4.429 - 4.429t)e^{-1t} + 4.429\right]$

$t := 0, 0.1 .. 12$ діапазон зміни часової координати



<u>Приклад Б.3.</u>

Побудувати перехідну характеристику системи автоматичного керування, якщо відоме диференціальне рівняння, що описує систему:

$j'' + 2j' + 5j = m$

при вхідному впливі у вигляді одиничної сходинки $\mu(t)=1(t)$. Початкові умови нульові: $\varphi(o) = 0$; $\varphi'(o) = 0$.

Для розв’язку застосуємо класичний метод рішення диференціальних рівнянь і всі розрахунки виконаємо в математичному пакеті Mathcad.

Лістинг розрахунків і побудов в середовищі Mathcad наведений нижче.

ORIGIN ≡ 1

Корені характеристичного рівняння комплексні

Рівняння динаміки САР:

$\varphi'' + 2\varphi' + 5\varphi = \mu$ (1)

Визначаємо корені характеристичного рівняння:

Given

$p^2 + 2p + 5 = 0$

$\mathrm{Find}(p) \rightarrow (-1 + 2i \quad -1 - 2i)$

Записуємо вид вільної складової

$\varphi_{віл} = (C1\cos(2t) + C2\sin(2t))e^{-1t}$

Визначення вимушеної складової:

Вимушена складова дорівнює константі $\varphi_{вим} = C_3$

$\varphi'' := 0 \quad \varphi' := 0 \quad \mu := 1$

Given

$\varphi'' + 2\varphi' + 5\varphi = \mu$

$C3 := \mathrm{Find}(\varphi) \rightarrow \frac{1}{5}$

$C3 = 0.2$

+

Загальний вид часової характеристики:

$\varphi(t) = (C1\cos(2t) + C2\sin(2t))e^{-1t} + C3$ (2)

Для знаходження коефіцієнтів C_1 та C_2 використовуємо початкові умови:

Знаходимо першу похідну від рівняння *(2)*:

$$\frac{d}{dt}\left[(C1\cos(2t) + C2\sin(2t))e^{-1t} + C3\right] \rightarrow e^{-t}\cdot(2\cdot C2\cdot\cos(2\cdot t) - 2\cdot C1\cdot\sin(2\cdot t)) - e^{-t}\cdot(C1\cdot\cos(2\cdot t) + C2\cdot\sin(2\cdot t))$$

$\varphi'(t) = e^{-t}\cdot(2\cdot C2\cdot\cos(2\cdot t) - 2\cdot C1\cdot\sin(2\cdot t)) - e^{-t}\cdot(C1\cdot\cos(2\cdot t) + C2\cdot\sin(2\cdot t))$ (3)

Підставляємо $t=0$ в рівняння *(2)* та *(3)* та складаємо систему рівнянь:

$t := 0$

Given

$(C1\cos(2t) + C2\sin(2t))e^{-1t} + C3 = 0$

$e^{-t}\cdot(2\cdot C2\cdot\cos(2\cdot t) - 2\cdot C1\cdot\sin(2\cdot t)) - e^{-t}\cdot(C1\cdot\cos(2\cdot t) + C2\cdot\sin(2\cdot t)) = 0$

$$koef := \mathrm{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Отже

$C1 := koef_1 = -0.2$

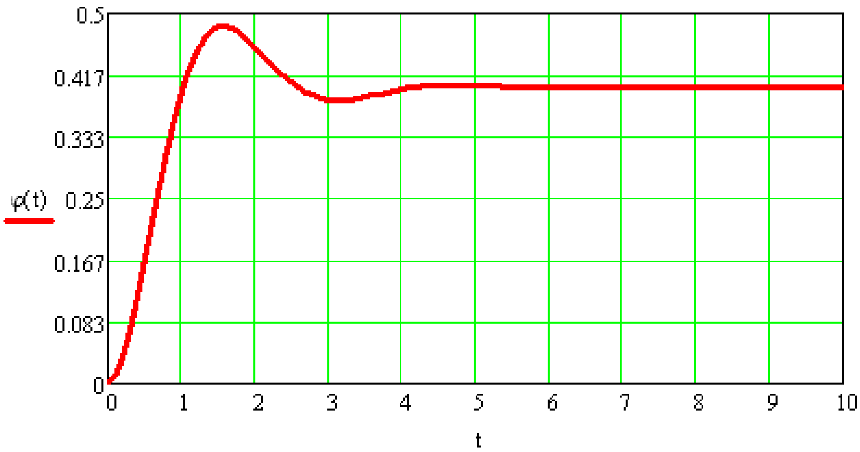
$C2 := koef_2 = -0.1$

$C3 = 0.2$

Підставляємо знайдені коефіцієнти в рівняння *(2)* та отримаємо розв'язок часової характеристики:

$$\varphi(t) := (-0.4\cdot\cos(2\cdot t) - 0.2\,\sin(2\cdot t))\cdot e^{-t} + 0.4$$

$t := 0, 0.1 .. 15$ діапазон зміни часової координати

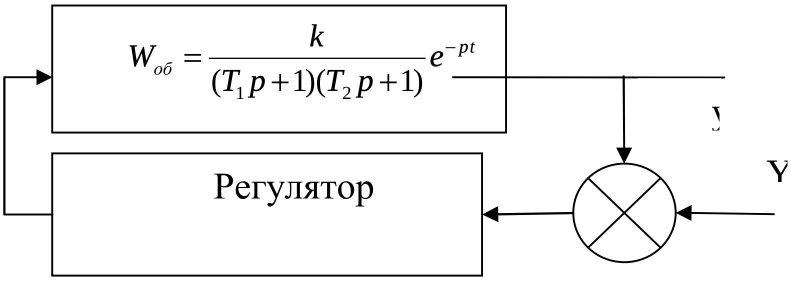


Додаток В

Побудова АФХ розімкненої системи з використанням середовища MathCad 14

Завдання

Для заданої системи регулювання визначити АФХ розімкненої системи

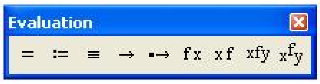


В якості регулятора використовується П-регулятор

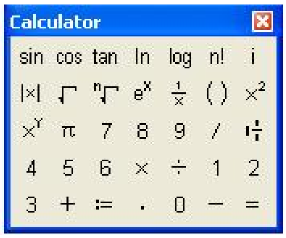
<u>Підготовка середовища</u>

Вводимо уявну одиницю *j як*

$j \equiv \sqrt{-1}$



Знак глобального присвоєння $\equiv$ вставляємо натисненням на відповідної кнопки панелі **Evaluation** або введенням ~ з клавіатури.



Символ квадратного кореню вставляється аналогічно з панелі **Calculator**

Задаємо масив індексів

$i := 0..1000$

(вводиться так: **i : 0 ; 1000**)

Задаємо масиви значень ω і p:

$\omega_i := 0.01 \cdot i$

$p_i := \omega_i \cdot j$

Нижній індекс вставляється за допомогою панелі **Matrix** або клавішею [.

<u>Передавальна функція об'єкта</u>

Введемо відомі параметри передавальної функції об'єкта

$k := 12$ $\tau := 1$ $T1 := 0.5$ $T2 := 0.3$

Введемо власне функцію об'єкта у вигляді масиву, тобто вона повинна бути проіндексована

$$Wob_i := \frac{k}{(T1 \cdot p_i + 1) \cdot (T2 \cdot p_i + 1)} \cdot e^{-p_i \cdot \tau}$$

Символ експоненти вставляється з панелі **Calculator,** а літера τ із панелі **Greek.**

Передавальна функція П регулятора

$Kp := 1$

Вводимо передавальну функцію П регулятора

$Wreg_i := Kp$

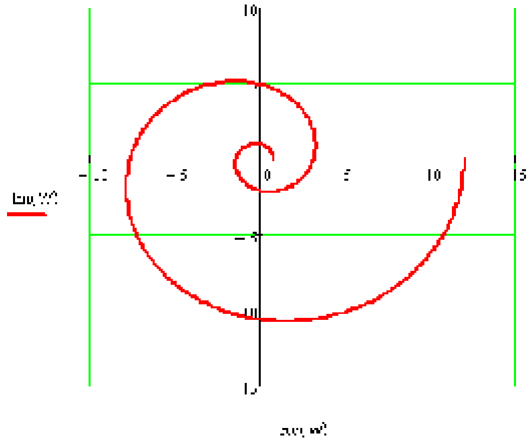
<u>Побудова загальної АФХ об’єкта і регулятора</u>

Знайдемо загальну передавальну функцію об’єкта і регулятора при розімкненій системі

$W_i := Wob_i \cdot Wreg_i$

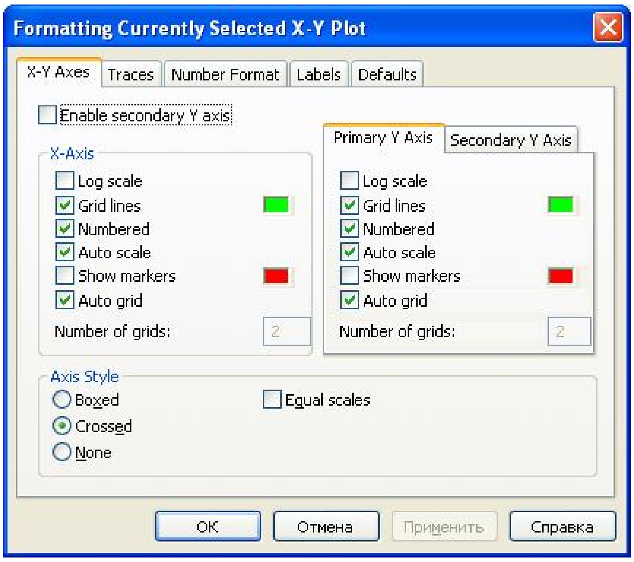
Побудуємо АФХ отриманої функції.

Для цього потрібно поставити курсор у точці де має бути верхній лівий кут майбутнього графіка і натиснути на кнопку **X-Y Plot** на панелі **Graph.** Відразу ввести **Re(W) [Tab] [Tab] [Tab] Im(W).** Тут **Re(W)** і **Im(W)** функції, що виділяють дійсну і уявну відповідно частини комплексного числа W.



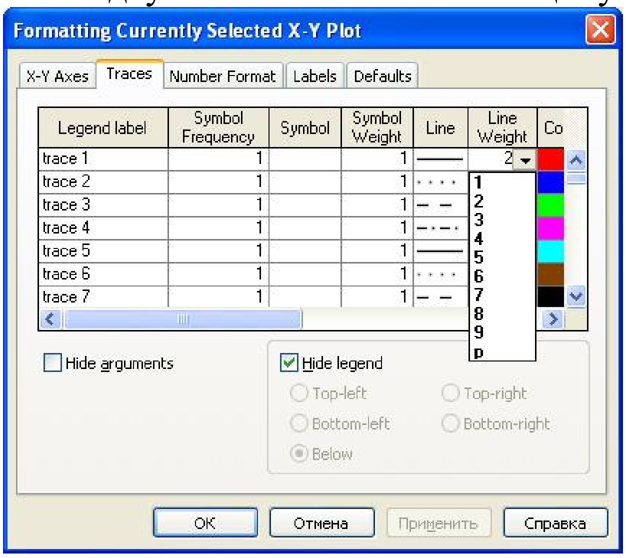
Налаштуємо вигляд створеного графіка, для цього потрібно:

двічі клацнути по графіку



У вікні, що відкрилось переставити перемикач Axis Style у положення Crossed і встановити мітки Grid lines у фреймах X-Axis Primary Y Axis.

Перейти на вкладку Traces і збільшити товщину лінії до 2.



В якості регулятора використовується ПІ – регулятор

Підготовка середовища

Вводимо уявну одиницю *j як*

$j \equiv \sqrt{-1}$

Знак глобального присвоєння ≡ вставляємо натисненням на відповідної кнопки панелі **Evaluation** або введенням ~ з клавіатури.
Символ квадратного кореню вставляється аналогічно з панелі **Calculator**

Задаємо масив індексів

$i := 0..1000$

(вводиться так: **i : 0 ; 1000**)

Задаємо масиви значень ω і p:

$\omega_i := 0.01 \cdot i + 10^{-19}$

додавання дуже малого числа необхідно для усунення помилки ділення на нуль

$p_i := \omega_i \cdot j$

Нижній індекс вставляється за допомогою панелі **Matrix** або клавішею [.

Передавальна функція об’єкта

Введемо відомі параметри передавальної функції об’єкта

$k := 12$ $\qquad \tau := 1$ $\qquad T1 := 0.5$ $\qquad T2 := 0.3$

Введемо власне функцію об’єкта у вигляді масиву, тобто вона повинна бути проіндексована

$$Wob_i := \frac{k}{(T1 \cdot p_i + 1) \cdot (T2 \cdot p_i + 1)} \cdot e^{-p_i \cdot \tau}$$

Символ експоненти вставляється з панелі **Calculator,** а літера τ із панелі **Greek.**

<u>Знаходження параметрів ПІ регулятора</u>

Задаємо попереднє значення коефіцієнта пропорційності і часу ізодрому

$Kp_0 := 1$ $\qquad$ $Ti_0 := 0.5$

параметри задані у вигляді масивів для формування таблиці результатів

Вводимо передавальну функцію ПІ регулятор

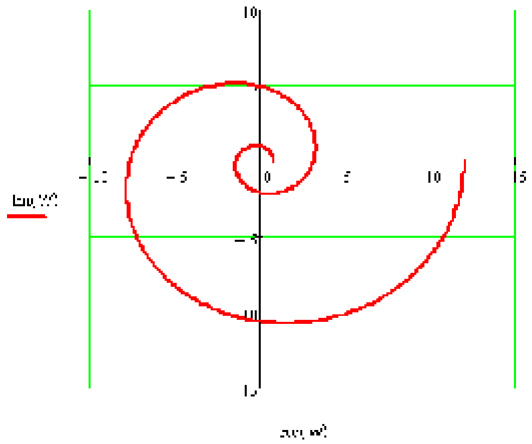
$$Wreg_i := Kp_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{Ti_0 \cdot p_i}\right)$$

Знайдемо загальну передавальну функцію об’єкта і регулятора при розімкненій системі

$W_i := Wob_i \cdot Wreg_i$

<u>Побудуємо АФХ отриманої функції.</u>

Для цього потрібно поставити курсор у точці де має бути верхній лівий кут майбутнього графіка і натиснути на кнопку **X-Y Plot** на панелі **Graph.** Відразу ввести **Re(W) [Tab] [Tab] [Tab] Im(W).** Тут **Re(W)** і **Im(W)** функції, що виділяють дійсну і уявну відповідно частини комплексного числа W.



Додаток Г

Приклади побудови годографа Михайлова в середовищі Mathcad

Приклад Г.1. Для системи, що описується диференціальним рівнянням виду: $2j^{(4)} + 1.3j''' + j'' + 5j' + 7j = 5.1m$ побудувати годограф Михайлова.

Запишемо характеристичне рівняння: $2p^4 + 1.3p^3 + p^2 + 5p + 7 = 0$.

Знайдемо функцію Михайлова і виділимо дійсну і уявну складові.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Побудова годографа Михайлова

Знайдемо функцію Михайлова:

$$Fm(jw) := 2\cdot(jw)^4 + 1.3(jw)^3 + (jw)^2 + 5(jw) + 7$$

Задамо діапазон зміни частоти:

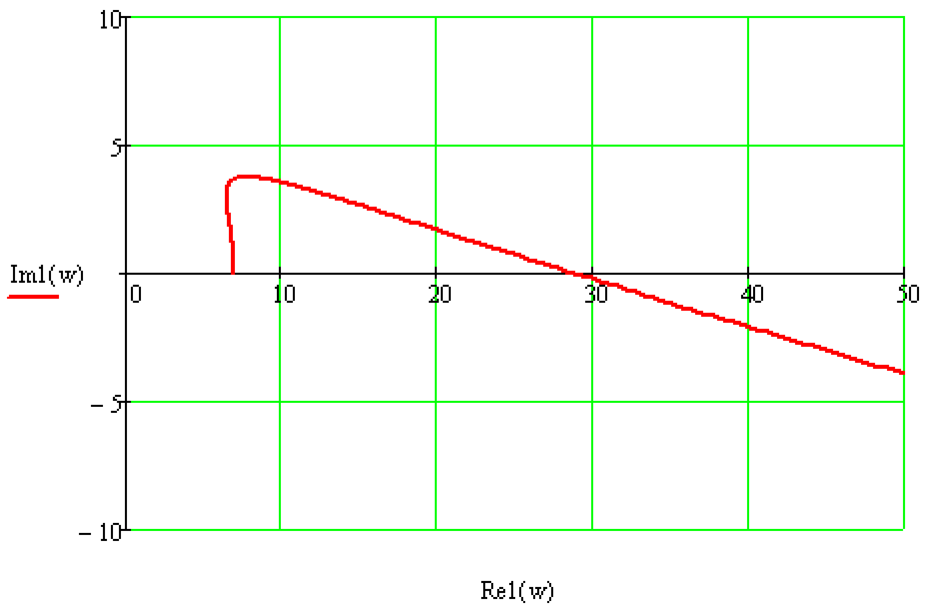
$$w := 0, 0.01 .. 5$$

Знайдемо дійсну і уявну складові:

$$Re1(w) := 2w^4 - 2\cdot w^2 + 7$$

$$Im1(w) := w\cdot\left(5 - 1.3\cdot w^2\right)$$

Побудуємо годограф Михайлова:



Як видно з наведеного рисунку, годограф Михайлова починається на дійсній додатній півосі, але обертається за годинниковою стрілкою і не проходить послідовно потрібну кількість (чотири) квадрантів координатної площини. Таким чином, система нестійка.

Приклад Г.2. Для системи, що описується диференціальним рівнянням виду: $j^{(4)} + 2j''' + 16j'' + 2j' + 7j = 4.8m$ побудувати годограф Михайлова.

Запишемо характеристичне рівняння: $p^4+2p^3+16p^2+2p+7=0$.

Знайдемо функцію Михайлова і виділимо дійсну і уявну складові.

Фрагмент лістингу Mathcad наведений нижче:

Побудова годографа Михайлова

Знайдемо функцію Михайлова:

$$Fm(jw) := (jw)^4 + 2(jw)^3 + 16(jw)^2 + 2(jw) + 7$$

Задамо діапазон зміни частоти:

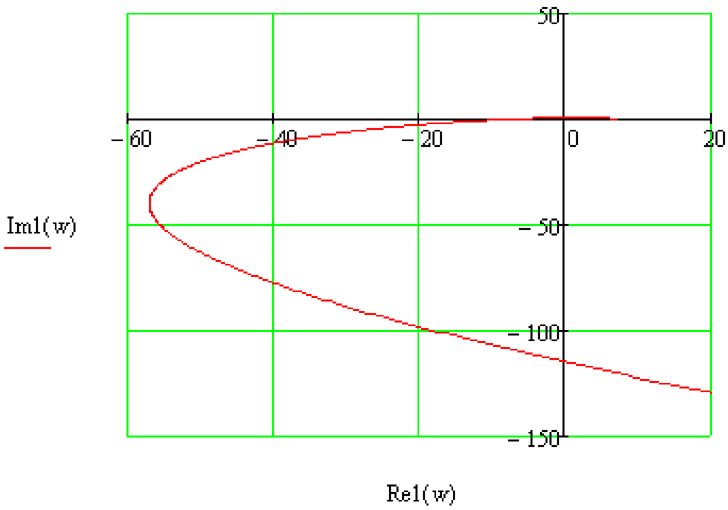
$$w := 0, 0.01 .. 5$$

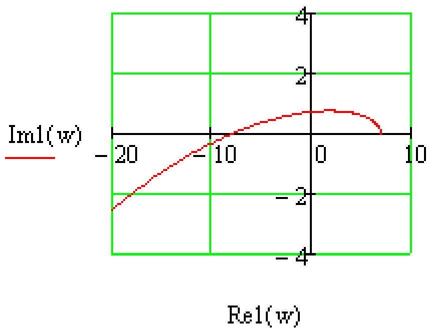
Знайдемо дійсну і уявну складові:

$$Re1(w) := w^4 - 16w^2 + 7$$

$$Im1(w) := w \cdot \left(-2w^2 + 2\right)$$

Побудуємо годограф Михайлова:





Як видно з наведеного рисунку, годограф Михайлова починається на дійсній додатній півосі, обертається проти годинникової стрілки і послідовно проходить 4 чверті координатної площини (4 – порядок характеристичного рівняння досліджуваної системи).

Таким чином, система стійка.

(Другий графік годографу побудований для наочності поведінки функції Михайлова в околу нульової частоти).